106 - Groupe linéaire d’un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Références	[H2G2.1], [Perrin], [Griff]
Section	Algèbre
Date	@25 septembre 2024
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Matthieu Romagny
Développements choisis	Groupe O(k,l), Simplicité de SO3(R)
Nb choisis	2
Autres développements à case comme item	, Lemme de Fitting et denombrement des matrices nilpotentes sur Fq
Développements	Groupe O(k,l), Simplicité de SO3(R), Lemme de Fitting et denombrement des matrices nilpotentes sur Fq

Rapport de Jury

- savoir faire correspondre sous groupes et stabilisateurs de certains actions naturelles
- savoir réaliser Sn dans GLn et faire le lien signature et déterminant
- topo
- sous groupe unitaires (POUR ALLER PLUS LOIN)

Introduction

- GL: fait un pont entre la théorie des groupes et l’algèbre linéaire: étudie de base en Algèbre Linéaire et donc peut utiliser outils de théorie groupe pour l’algèbre linéaire

Plans

- ***Plan***

  I. Groupe général linéaire et spécial linéaire

  1. Définitions et premières prop
  2. Générateurs
  3. Conjugaison, centres et groupes dérivés
  4. Etude de GLn(F_q): deux applications

  II. Groupe orthogonal et spécial orthogonal

  Cas E=R ev , produit scalaire

  1. Définitions et première prop
  2. Générateurs, conjugaison, centre (groupes dérivés)
  3. Cas des dimensions 2 et 3
  4. Généralisation avec une forme bilinéaire

  III. Propriétés topologies

  K=R ou C

  1. Fermeture/ouverture / compacité
  2. Connexité

- ***Plan détaillé***
  - I.1. Définitions et premières prop
    - définition GL(E)/SL(E)
    - isomorphisme avec espaces de matrices
    - SLE sgrp distingué de GL(E)
    - ex: Sn s’injecte dans GLn(E) avec matrices de permutations et lien signature et déterminant
  - I. 2. Générateurs
    - def dilatation (existe un hyperplan tqt id + det≠1) + prop: equivalence def avec il existe base tq matrice élementaire + rq c’est ce qu’on appelle matrice élémentaire de dilatation
    - def transvection (hyperplan + det=1) + prop: équivalence def f(x)a + prop: équivalence il existe une base matrice + def matrice de transvection élémentaire
    - opérations élémentaires (si pas de place tableau en annexe)
    - Générateurs de GLn/SLn + rq pivot de Gauss et applications résolutions systèmes linéaire
    - Génrérateurs de SL(E) / GL(E) + que dilatations et endormophismes diagonablisables |K|≥3
  - I. 3. Conjugaison, centres et groupes dérivés
    - principe de conjugaison: u trans u-1 = trans de droite u(D).. de même dilatation + app: centres

- rq avec prop ? et prop ? voit que dilatations conjuguées ssi même rapport et transvections tjrs conjugués dans GL(E). On a en plus transvections conjuguées dans SL(E) n≥3. + app calcul des groupes dérivés de SLn puis GLn
- attention distinction conjugaison dans SL et dans GL

▼ I.4.Etude de GLn(F_q) et applications

- dénombrement de GLn(F_q) + SLn(F_q) (+ diagonlisables=
- application 1: dénombrement des matrices nilpotentes Fiiting
- s'injecte en particulier à GLn(F_q) + application (2) utilisation dans la démonstration du premier théorème de sylow (existence)

▼ II. 1. Définitions et première prop

- définition isométrie vectorielle + passage à On + si M dans On alors det =+-1
- définition de SOn comme noyau → distingué
- décomposition polaire + applications ? norme subordonéee

▼ II. 2. Générateurs, conjugaison et centres

- def symétrie orthogonale, réflexions, renversements
- On engendré par les réflexions, puis SOn par les renversements
- principe de conjugaison, le conjugué d'une symétrie ortho est une symétrie ortho + app: centres
- rq: on a une prop plus général: toutes symétrie orthogonale de même dimension du plan par lequel ça symétrise sont conjugués dans SO(E) (rq: dans tous les cas besoin pour SO" simples) + (groupes dérivés)

▼ II. 3. Cas des dimensions 2 et 3

→ Griffone

- cas n=2, cas n=3
- rq: dans SO3 tous les éléments sont des rotations

▼ II.4. Généralisation avec une forme quadratique

→ Griffone, H2G2

- définition endo orthogonal puis O(q) qui est bien un groupe + (SO) + équivalence matrice
- rq avec forme bilinéaire définie positive retrouve tout ce qu'on a fait avant (produit scalaire)
- étude de O(p,n-p) + rq: application connexité

▼ III. 1. Fermeture/ouverture /compacité/densité

- GLn ouvert dense non borné de Mn + app / différentielle du déterminant
- SLn fermé non borné
- On(R) compact + app SOn compacte
- On compacte + densité de GLn ⇒ décomposition polaire dans Mn
- (Le groupe O(p, s) est compacte si et seulement si p = 0 ou s = 0)

▼ III.2. Connexité

- Dans C: GLn, SLn connexes par arcs donc connexes+ app: surjectivité de l'exp
- Dans R: SLn connexe par arcs mais pas GLn qui a deux comp connexes

- Son(R) connexes par arcs et donc connexes tandis que On(R) ne le sont pas, ils ont tous les deux deux composantes connexes + app SO3 simple (+ app Si p != 0, s != 0, le groupe O(p, s) admet quatre composantes connexes.)

- critère de nilpotence par la trace + burnside groupes fini dans GLn
- culture: théorème de Brauer: Soient K un corps et n un entier. On note Pσ la matrice associée à la permutation σ de Sn. Soient σ et σ'∈Sn. Alors σ et σ' sont conjugués si et seulement si Pσ et Pσ' sont semblables dans Mn(K)