105 - Groupe des permutations d’un ensemble fini. Applications.

Références	[Perrin], [GOU_AGP]
Section	Algèbre
Date	@22 octobre 2024
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Matthieu Romagny
Développements choisis	Automorphismes de Sn, Isométries du cube et du tétraèdre.
Nb choisis	2
Développements	Automorphismes de Sn, Isométries du cube et du tétraèdre.

Rapport de Jury

- relier à la notion d’orbite
- existence du morphisme non trivial
- tout groupe cyclique se plonge dans Sn et calcul de la signature dans cas concrets
-

Introduction

→ L’étude du groupe Sn est primordiale car celui-ci intervient dans de nombreux domaines des mathématiques : on le voit en algèbre linéaire, en géométrie.

→ De plus, dans la théorie des groupes, il tient une place à part puisque grâce aux actions de groupes (via le morphisme de structure), il est au cœur de la théorie des actions de groupes. le groupe symétrique est également (via le théorème de Cayley) un bon moyen de bien connaître les groupes finis,

→ I. On justifie ici pourquoi on étudie uniquement les groupes Sn

→ I. La décomposition en produits de cycles est une opération très importante qui résulte de l’action naturelle de Sn sur lui-même. Elle nous donne le premier système de générateurs ainsi que les classes de conjugaison.

→ Dans le II, dire qu’on étudie les permutations aléatoires pour avoir des infos sur Sn (pas juste pour le plaisir)

Plans

▼ ***Plan***

I. Généralités

1. Présentation de Sn
2. La signature et An
3. Profil et conjugaison
4. D’autres systèmes de générateurs et leurs utilités

II. Permutations aléatoires

1. *Mode de génération (revoir cours Arthur)*
2. *Applications à l’étude de Sn (revoir cours Arthur)*

III. Applications

1. Pour l’étude d’autres groupes
2. En algèbre linéaire et géométrie
3. Pour les polynômes symétriques
4. En proba

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Présentation de Sn

- définition de SX comme ensemble des bijections muni composition

- prop Sx isomorphe à Sn si X de cardinal n
- notation des permutations
- prop: ordre de Sn
- def support / cycle / transposition
- prop décomposition en cycle disjoints + rq s'obtient en étudiant les orbites de l'action restreinte de Sn à <sigma> sur [|1,n|] + ex
- csq: Sn engendré par les cycles + ordre d'un élément
- Sn engendré par les transpo

▼ I. 2. La signature et An

- prop/def application epsilon avec gros produits est l'unique morphisme de groupe non trivial de Sn dans +- 1 . On l'appelle signature
- fomules pour calcul de la signature (prop 29 Jerem) (-1)^truc : signature d'un p-cycle puis avec décompo en cycle à support disjoints la générale + (-1)^nb de transpo
- def An comme noyau de la signature + prop/csq An d'indice 2 et distingué

▼ I. 3. Profil et conjugaison

- definition profil + ex
- lemme: principe de conjugaison sigma c sigma -1
- prop: les p cycles sont conjuguées Ainsi deux permutations conjuguées ssi même profil.
- les classes de conjugaisons: (1) sont en bijections avec les partitions de n et (2) cardinal de chaque classe de conjugaison cardinal (cf Jerem) + exemple: nbr de transpos et nombres de n-cycles(retrouve résultats connus)
- dans An, les 3-cycles sont conjugués pour $n \geq 5$

▼ I.4. D'autres systèmes de générateurs et leurs utilités

- Pour An :
  - les 3-cycles + csq: D(Sn)=An, D(An)=An et An simple et seuls sous groupes distingués de Sn : An, id et Sn
- Pour Sn :
  - transpo de la forme (1,i) + csq: phy qui envoie transpo sur transpo est intérieur + corol: Aut(Sn) pour $n \neq 6$ (DEV1)

▼ II. Etude des permutations grâce au dénombrement et probabilité

- nbr de dérangements

° Nbr de cycles

- nbr de moyen de point fixe, variance
- loi du nombre de cycles (retrouve avant)
- algo + loi du nbr de cycles total

° Nombre d'inversion et descente

- 3 algorithmes et app: inversion, loi du nbr de descente

▼ III.1. Pour l'étude d'autres groupes

- th de Cayley + rq: application aux th de Sylow
- ex19 Jerem (image par le morphisme de Cayley d'un élément d'ordre d) ??

▼ III.2. En algèbre linéaire et géométrie

- formule pour le déterminant (si place formes alternées.. antisymétriques..)
- rq comme déterminant lié au volume: application en géométrie
- isométrie du cube et du tétraèdre découpé en 2 items
- (nbr coloriages) DEV 2

▼ III.3. Pour les polynômes symétriques (cf leçon sur ça)

→ Gourdon

- def poly sym et ex + def poly sym élémentaire

    - prop: tout poly sym se mets comme poly en les poly sym élémentaire + ex
    - critère de nilpotence par la trace ? Jerem ?
  - ▼ III.4. En proba
    - def statistique d’ordre + densité [MODE]
- matrices de permutations