102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l’unité. Applications.

Références	[ROM_AG], [Gozard], [Carnet voyage algébrie]
Section	Algèbre
Date	@14 janvier 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Lionel Fourquaux
Développements choisis	Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur Q, Polygones constructibles
Nb choisis	2
Développements	Matrice circulante et polygones réguliers, Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur Q, Polygones constructibles

Rapport de Jury

Les notions élémentaires concernant les nombres complexes de module 1 (dénitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.) doivent être présentés, avant d'aborder l'aspect groupe de S1 en considérant son lien avec pR, q et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il est souhaitable de présenter des applications en géométrie plane, par exemple la constructibilité des polygones réguliers.

Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, et éventuellement les représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de C. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans Qris, ou à la dualité des groupes abéliens nis ou encore aux transformées de Fourier discrètes et rapides. Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur Rn) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

Introduction

- fonction exponentielle: donne moyen compacte d’écrire les nombres complexes
- apparaissent comme spectre de matrices, poly cyclotomiques

Plans

▼ ***Plan***

I. Nombres complexes de module 1

1. Exponentielle
2. Groupe U
3. Géométrie plane

II. Groupes des racines n-ième de l’unité

1. Généralités
2. Apparition en algèbre linéaire

III. Cyclotomie

IV. Constructibilité des nombres à la règle et au compas

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Exponentielle complexe

- def exponentielle complexe comme série entière
- prop: exp(z+z’) = exp(z)exp(z’) donc exp morphisme de (C,+)
- Moivre, Euler, linéarisation, calcul intégral (Gourdon)

▼ I.2. Groupe U

- def de U: On définit U le groupe des nombres complexes de module 1 comme le noyau du morphisme de groupe suivant : z→ |z|
- Ainsi, U = {z ∈ C∗, |z| = 1} est un sous-groupe multiplicatif du groupe C*
- ex spectre des matrices unitaires inclus dans U
- lemme: sous groupes de R,+ sont soit denses soient de la forme aZ
- app1: appli t dans R → e^(it) dans U morphisme surjectif(csq de surj de C dans C*) de noyau non trivial → def pi tq ker(f)=2pi Z (on a dc U~R/2piZ)
- app2: les sgrps de U sont soit dense soit finis
- décomposition polaire

▼ I.3 Géométrie plane

- Lien entre U et S1 en identifiant C à R2
- décomposition polaire et interprétation longeur argument
- paramétrisation de S1 avec (cos 0, sin 0)
- théorème de l'angle inscrit

▼ II. 1. Généralité

- def
- prop Un cyclique, app n=somme (phi(d))
- rq les groupes finis de la prop ? sont exactement les Un
- kronecker

▼ II.2. Apparition en algèbre linéaire

- matrice circulante et polygones réguliers: Laura: Déf : d'une matrice circulante, elles sont simultanément diagonalisables, leurs valeurs propres ;
ajouter la valeur du déterminant circulant.
- si M inversible de C, matrice d'ordre fini d alors diagonalisable et vp sont des racines d-ième de l'unité + app: nombre d'ordre possible tq M dans GLn(Z) d'ordre fini d est fini

▼ III. Cyclotomie

- def polynômes cyclotomiques
- sont dans Z
- dirichlet faible
- irréductibilité DEV 1
- app krnocker: P unitaire irred à racines de module ≤ 1 alors P=X ou un poly cyclotomiques
- app: degré de l'extension des Q(w)

▼ IV. Nombres constructibles

- def
- théo Gauss Wantzel DEV 2

- dirichlet fort ? analyse complexe, fonction L de dirichlet