101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Références	[Calais], [Perrin], [H2G2.1], [ROM_AG]
Section	Algèbre
Date	@2 octobre 2024
Statut leçon	Plan détaillé ok
Enseignant	Ludovic Marquis
Développements choisis	Lemme de Fitting et denombrement des matrices nilpotentes sur Fq, Isométries du cube et du tétraèdre.
Nb choisis	2
Autres développements à case comme item	Ore / Frattini, Automorphismes de Sn, Loi de réciprocité quadratique
Développements	Ore / Frattini, Isométries du cube et du tétraèdre.

Rapport de Jury

⇒ Ce qu'ils disent dont on a pas encore parlé: actions sur des anneaux ou des espaces de polynômes

Introduction

- permet d'avoir des infos sur G ou X
- utiles pb de dénombrements comme avec Burnside
- étudier les orbites permet de classifier, trouver un représentant simple par orbite ou des invariants

Plans

▼ ***Plan***

I. Définitions et premières prop

1. Définition d'une action de groupe
2. Orbite, stabilisateur et points fixes
3. Propriétés des actions

II. Actions usuelles

1. Par translation
2. Par conjugaison
3. Application aux théorèmes de Sylow

III. Actions de groupes en algèbre linéaire et géométrie

1. Géométrie
2. En algèbre linéaire

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Définition d'une action de groupe

→ Calais p. 196

- définition d'action de groupe + ex du sgrp symétrique de E un ens qui agit sur E
- voc G agit sur X, X est un G ensemble
- rq avec morphisme et continuer ex avec ici morphisme =id
- ex permutation circulaire
- prop si H sous groupe de G qui agit sur X alors H agit sur X

▼ I. 2. Orbite, stabilisateur et points fixes

→ Calais principalement + Perrin

- stabilisateur + sgrp de G + le stab d'un point de {1...n}dans l'action de Sn sur lui est isomorphe à Sn-1
- orbite + rq avec classe d'équivalence → X *union des orbites +ex: H agit translation à gauche sur G ⇒ Lagrange*
- relation orbite/stabilisateur (bijection + cas groupe fini avec cardinaux) + *app: équations aux classes n°1 + app Cauchy (Rombaldi)*
- Fix et burnside (cf exo p 226)

▼ I. 3. Propriétés des actions

→ Hédoniste Caldero + Perrin

- transitive / fidèle / libre + injectivité de pour fidèle, transitive, qu'une orbite
- prop: libre ⇒ fidèle
- ex la premiere action du 1.1 est transitive, fidèle mais non libre pour card(E)≥ 3

▼ II. 1. Par translation

→ Ulmer

° De G → G

- définition/prop: fidèle libre transitive
- Cayley

° De G→ G/H

- def + prop que transitive en général
- lemme d'Ore

▼ II. 2. Par conjugaison (de G→ G)

→ Ulmer . Perrin, Rombaldi

- définition
- prop: jamais libre sauf G={e}, zentre ensemble des points fixes, pas nécessaire fidèle ou transitive (*Caldero*)
- classe conjugaison, conjugués, centralisateur
- (principe de conjugaison, cycles conjugués ssi même longueur)
- app des centralisateurs automorphismes de Sn (*Perrin*)
- equation aux classes n°2 + app: Z(G) non trivial si p-groupe (groupe d'ordre p^2 abélien)

▼ II. 3. Application aux théorèmes de Sylow

→ Perrin

- def p-Sylow
- phrase utile actions par translation et par conjugaison et Cayley utiles dans demo de:
- lemme 5.5 et théorème de Sylow
- app de Sylow pour mq Aut(S_6)≠Int(S_6)

▼ III. 1 Géométrie

- action de Dn sur les racine n-ième de l'unité: fidèle mais pas libre (*Ulmer*)
- Isométries du cube et du tétraèdre DEV (et coloriages)

▼ III.2. En algèbre linéaire

→ H2G2

° Action par équivalence:

- def
- ds la même orbite ssi même rang

° Action par conjugaison

- def + voc: semblable
- Invariance du rang, de la trace, du déterminant

- (Dénombrement matrices diagonalisables dans Fq)
- invariants de similitude Frobenius

° Action par congruence

- def
- matrices congrues: même forme quadratique dans deux bases
- théorème d'inertie de Sylvester
- discriminant
- app: réciprocité quadratique

° Action pour le dénombrement des matrices nilpotentes: DEV 2

- lemme de Fitting
- théo

Version si on devient plus fortes: on découpe le III. en deux parties:

III. Actions de groupe en algèbre linéaire: tout pareil que III.2. actuel

IV. Actions de groupe en groupe et géométrie:

IV. 1. Géométrie tout pareil de III.1. avec coloriages

IV.2. Théorie des groupes: *Cauchy (à virer d'avant)+* Iwasawa (2 transitivité et théo) et application à la simplicité de PSL2 *cf Caldero partie exercice (pour théo) et définition et énoncé partie cours dont la corrrection dans cours Bachir*