

## Dual de $\mathcal{M}_n(K)$ .

[CVA] p5 + [X-ENS2] p41

Recatagel: 159

Théorème:  $n \in \mathbb{N}$ .

[ toute forme linéaire  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_n(K)$  peut s'écrire, pour  $A \in \mathcal{M}_n(K)$   
unique,  $\varphi: X \in \mathcal{M}_n(K) \mapsto \text{Tr}(AX) \in K$ .

Preuve:

Soit  $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_n(K)$   $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

On a  $\varphi(X) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} x_{ij}$  avec  $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  des réels déterminés par  $\varphi$ .

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  quelconque  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , on a par ailleurs:  $\text{Tr}(AX) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji} x_{ij}$

Donc si on pose pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$   $a_{ij} = b_{ji}$ , on obtient  $\varphi(X) = \text{Tr}(AX)$ .

Donc il existe une telle matrice  $A$ .

L'application linéaire  $\varphi: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)^*$   
 $A \mapsto \varphi_A: X \mapsto \text{Tr}(AX)$   
est une surjection par ce qui précède.

Par égalité des dimensions,  $\varphi$  est une bijection.

D'où l'unicité de  $A$ .

Application 1:

Soit  $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$  tq  $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ ,  $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ .

Alors il existe  $\lambda \in K$  tq  $\varphi = \lambda \text{Tr}$ .

Preuve:

Par le théorème, il existe  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $\varphi: X \mapsto \text{Tr}(AX)$

Soient  $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ , on a:  $\varphi(XY) = \text{Tr}(AXY) = \text{Tr}(A Y X) = \text{Tr}(X A Y)$

$$\varphi(XY) = \varphi(YX) \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Il suit que  $\text{Tr}(AX - XA)Y = 0$  pour  $Y$  quelconque.

Par injectivité de  $\varphi$ ,  $AX - XA = 0$  et ce pour  $X$  quelconque.

En d'autres termes,  $A \in Z(M_n(K))$ .

Gr, Lemme:  $Z(M_n(K)) = \{\lambda \text{Id}_n : \lambda \in K\}$

Preuve: Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ .

Soient  $i, j \in [1, n]$ .  
Alors  $AE_{ij} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} E_{kl} E_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$

$$= E_{ij}A = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} E_{ij} E_{kl} = \sum_{l=1}^n a_{jl} E_{il}$$

Il suit que  $a_{ii} = a_{jj}$  et  $a_{ij} = a_{ji} = 0$

Donc  $A = a_{ii} \text{Id}_n \in \{\lambda \text{Id}_n : \lambda \in K\}$ .

Réciproquement, les homothéties sont dans le centre.  $\square$

Donc il existe  $\lambda \in K$  tq  $\psi: X \mapsto \text{Tr}(\lambda X) = \lambda \text{Tr} X$ .  
i.e.  $\psi = \lambda \text{Tr}$ .

Application 2:

Tout hyperplan de  $M_n(K)$  rencontre  $GL_n(K)$ .

Preuve:

Soit  $H$  un hyperplan de  $M_n(K)$ .  
Il existe  $\psi \in M_n(K)^*$  tel que  $\text{Ker } \psi = H \neq M_n(K)$ .

Par le théorème, il existe  $A \in M_n(K)$  tq  $\psi(X) = \text{Tr}(AX)$ .

Donc  $A$  est non nul, notons  $r = \text{rg } A > 0$ .

$A$  est semblable à  $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

i.e. : il existe  $P, Q \in GL_n(K)$  tq  $A = PA_rQ$ .

Ce qui donne, pour  $X \in M_n(K)$ ,  $\psi(X) = \text{Tr}(PA_rQX) = \text{Tr}(A_r \underbrace{QX}_Y)$

Donc avec  $X \in GL_n(K)$  on a  $Y \in GL_n(K)$ .

Le problème est réduit à trouver  $Y \in GL_n(K)$  tq  $\text{Tr}(A_r Y) \neq 0$

et  $Y = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$  convient d'où  $X \in GL_n(K) \cap H$ .

$\square$

Recit  
dans le  
[X-ENS2] par  
un "c'est évident"  
fait, en tout cas  
avec des matrices.

Si  $\psi = 0$  et  
 $H = M_n(K)$   
n'est pas un hyperplan.