

Inégalité de Minkowski (déterminant). [X-ENSB] p136

Références: 149, 181, 157

Théorème:

Soit $A \in \mathcal{L}^+(M)$.

Soit $\alpha > 0$

On pose $\mathcal{P} = \{S \in \mathcal{L}^+(M) / \det S \geq \alpha\}$.

Alors $\inf_{S \in \mathcal{P}} \text{Tr}(AS) = m(\alpha \det A)^{\frac{1}{m}}$.

Preuve:

Puisque $A \in \mathcal{L}^+(M)$, il existe $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ avec $d_1, \dots, d_m > 0$ et $P \in O_n(M)$ telles que $A = PD^tP$ par le théorème spectral.

On en déduit que, pour $S \in \mathcal{P}$, on a:

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(PD^tPS) = \text{Tr}(D^tPSP) \quad (\text{car } \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA))$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq m} d_i \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq m} p_{ij} s_{ij}$$

On pose alors $S' = P^tSP$ dont on notera $(s'_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ les coefficients. On a:

- S' est symétrique définie positive (elle est clairement symétrique et ses vp. sont celles de S donc > 0)
- $\det S' = \det S$ ($(\det P)^2 = 1$).
- $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(DS') = \sum_{i=1}^m d_i s'_{ii}$.

On a donc, par concavité du logarithme, que:

$$\frac{1}{m} \ln(a) + (1 - \frac{1}{m}) \ln(b) \leq \ln(\frac{1}{m} a + (1 - \frac{1}{m}) b)$$

$$\ln(\frac{1}{m} \text{Tr}(AS)) = \ln(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d_i s'_{ii}) \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(d_i s'_{ii})$$

$$\geq \frac{1}{m} \ln(\prod_{i=1}^m d_i s'_{ii})$$

$$\geq \frac{1}{m} \ln(\det A \prod_{i=1}^m s'_{ii})$$

Or S' est symétrique définie positive donc l'inégalité d'Hadamard s'applique et donne: $\prod_{i=1}^m s'_{ii} \geq \det S'$

On en déduit:

$$\ln(\frac{1}{m} \text{Tr}(AS)) \geq \frac{1}{m} \ln(\det A \det S') \geq \frac{1}{m} \ln(\alpha \det A)$$

$\uparrow$
 $S \in \mathcal{P}$ donc $\det S' = \det S \geq \alpha$

Enfin, par croissance du logarithme, on a:

$$\frac{1}{m} \ln(T_n(AS)) \geq \ln(\alpha \det A)^{\frac{1}{m}} \quad \text{puis} \quad T_n(AS) \geq m(\alpha \det A)^{\frac{1}{m}}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Montrons qu'on peut choisir $S \in \mathcal{S}$ telle qu'on ait égalité.

Pour cela, prenons S telle que S soit diagonale avec $\lambda_{ii} = \frac{\lambda}{\lambda_i}$ pour i allant de 1 à m .

$$\text{On a alors } T_n(AS) = T_n(DS') = m\lambda. \quad \left(= \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\lambda}{\lambda_i} \right)$$

On choisit ensuite λ pour que l'on ait $\det S = \det S' = \alpha$.

$$\text{Il faut donc avoir } \prod_{i=1}^m \frac{\lambda}{\lambda_i} = \frac{\lambda^m}{\prod_{i=1}^m \lambda_i} = \frac{\lambda^m}{\det A} = \alpha.$$

$$\text{On prend donc } \lambda = (\alpha \det A)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\text{On a alors } S = PS'^t P \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad T_n(AS) = m(\alpha \det A)^{\frac{1}{m}}.$$

Théorème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soient } A, B \in \mathcal{L}_m^{++}(\mathbb{R}) \\ \text{On a : } (\det A)^{\frac{1}{m}} + (\det B)^{\frac{1}{m}} \leq (\det(A+B))^{\frac{1}{m}}. \end{array} \right.$$

Preuve: On pose $\mathcal{S}^+ = \{S \in \mathcal{L}_m^{++}(\mathbb{R}) / \det S \geq 1\}$

Alors pour $S \in \mathcal{S}^+$, on a :

$$\begin{aligned} (\det A)^{\frac{1}{m}} + (\det B)^{\frac{1}{m}} &\leq \frac{1}{m} (T_n(AS) + T_n(BS)) \\ &\leq \frac{1}{m} (T_n((A+B)S)) \end{aligned}$$

En passant à l'inf on a le résultat. ②

$$T_n(AS) + T_n(BS)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} \lambda_{ij} + \sum_{1 \leq i, j \leq m} b_{ij} \lambda_{ij}$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq m} (a_{ij} + b_{ij}) \lambda_{ij}$$

$$= T_n((A+B)S)$$