Diagonalisabilité de $\exp(A)$. [MH2G2-T]$_p$ 381.

Recasages : 155.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
e^A est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

Preuve :

"$\Leftarrow$" : Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Alors $e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1}$ donc e^A est diagonalisable car e^D est diagonale.

"$\Rightarrow$" : On considère la décomposition de Dunford de A :

$A = D + N$ avec
- D diagonalisable
- N nilpotente
- $DN = ND$.

Mq $N = 0$.

On remarque que
$$e^A = e^{D+N} = e^D e^N = e^D(I_n + e^N - I_n) = e^D + N'$$

Par le point précédent, D étant diagonalisable, e^D est diagonalisable.
De plus e^D et N commutent donc e^D et e^N commutent ($e^N \in \mathbb{C}[N]$).

Mq N' est nilpotente

On a $N' = e^D(e^N - I_n) = e^D N P(N)$ pour P un polynôme.

Puisque e^D, N et $P(N)$ commutent, on a :
$$(N')^n = (e^D)^n \underbrace{N^n}_{= 0_n} P(N)^n = 0$$

Finalement, $e^D + N'$ est bien la décomposition de Dunford de e^A.

Or e^A est diagonalisable donc $N' = 0$ par unicité de la décomposition de Dunford.

Or $e^D \in GL_n(\mathbb{C})$ et $e^D e^N = e^D$ donc on a $e^N = I_n$

Cependant, notant m l'indice de nilpotence de N, on a nécessairement $m = 1$ donc $N = 0$.

En effet, supposons par l'absurde que $m > 1$.

On pose : $A = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{N^k}{(k+1)!}$ qui est inversible car son spectre est réduit à $\{1\}$ car $A = I_n + M$, avec M nilpotente.

Mais alors $NA = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{N^{k+1}}{(k+1)!} = e^N - I_n = 0$

et en simplifiant par A, $N = 0$ ce qui est absurde.

D'où $m = 1$, $N = 0$ et ~~e^A~~ $A = D$ est diagonalisable

Application : Résoudre $e^A = Id$.

$S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, A$ est DZ et $sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}\}$

Analyse : Si $e^A = Id$, A est diagonalisable car e^A l'est par ce qui précède. Donc il existe $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = PDP^{-1}$.

Il suit : $I_n = e^A = e^{PDP^{-1}} = P\,Diag(d_1, \dots, d_n)P^{-1}$ et nécessairement $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $d_i \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Synthèse : Soit A diagonalisable tq $sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Alors $A = P\,diag(2ik_1\pi, \dots, 2ik_n\pi)P^{-1}$ et $e^A = P I_n P^{-1} = I_n$.