

Déterminant de Gram et projection sur un rev. [ROM] p. 570.

Recherches: 149, 161, (191).

Théorème:

Soit $n \geq 1$. E un K -ev.
Pour toute famille $(x_i)_{i=1}^n$ de vecteurs de E on a, $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Preuve: Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille de n vecteurs.

$$\text{Mg } \text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n).$$

$\rightarrow$ Si tous les vecteurs sont nuls, $G(x_1, \dots, x_n)$ est nulle
et $0 = \text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Supposons les vecteurs non tous nuls.

On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Par le procédé de Gram-Schmidt, il existe une base orthogonale
 $(e_i)_{i=1}^p$ de F .

On écrit alors les x_i dans cette base:

$$\text{Pour } i=1, \dots, n, \quad x_i = \sum_{k=1}^p a_{ki} e_k.$$

Il suit que pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^p a_{ki} a_{kj}$.

$$= (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$$

On a, en notant $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$:

$$G(x_1, \dots, x_n) = {}^t A A.$$

Mais alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle {}^t A A X, X \rangle = \langle A X, A X \rangle = \|A X\|^2$$

Donc $\text{Ker}({}^t A A) = \text{Ker}(A)$ et par le théorème du rang, $\text{rg}({}^t A A) = \text{rg}(A)$ i.e. $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Conclure: Soit $m \geq 1$.

[Pour toute famille $(x_i)_{i=1}^m$, $g(x_1, \dots, x_m) > 0$ et $!^c g(x_1, \dots, x_m) > 0$ si la fam. est libre.

Preuve: $\underline{Mg} \ g(x_1, \dots, x_m) > 0$:

Avec les notations précédentes, on a:

$$G(x_1, \dots, x_m) = {}^tAA \in \mathcal{L}_m^+(\mathbb{R}).$$

Il suit que $g(x_1, \dots, x_m) = (\det A)^2 > 0$

$\underline{Mg} \ g(x_1, \dots, x_m) > 0$ si $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.

" $\Rightarrow$ ": Si $g(x_1, \dots, x_m) > 0$, $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_m)) = m$.

Par le théorème précédent, $\text{rg}(x_1, \dots, x_m) = m$ donc $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.

" $\Leftarrow$ ": Si $(x_1, \dots, x_m)$ est libre, $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_m)) = m$

Donc $G(x_1, \dots, x_m) \in GL_m(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_m^+(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_m^{++}(\mathbb{R})$ donc

on a $g(x_1, \dots, x_m) > 0$.

Théorème:

Soit F un sous-espace de E de dimension m et $(x_i)_{i=1}^m$ une base de F .
Alors pour tout $x \in E$, on a:

$$d(x, F)^2 = \frac{g(x_1, \dots, x_m, x)}{g(x_1, \dots, x_m)}.$$

Preuve:

Soit $(x_1, \dots, x_m)$ une base de F dans E .

Soit $x \in E$ et $y \in F$ son projeté orthogonal.

Alors $d(x, F)^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

D'autre part, pour $i = 1, \dots, m$ on a $\langle x_i, x \rangle = \underbrace{\langle x_i, x - y \rangle}_{=0} + \langle x_i, y \rangle = \langle x_i, y \rangle$

$$\text{Enfin: } g(x_1, \dots, x_m, x) = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \dots & \langle x_1, y \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \|x_m\|^2 & \dots & \langle x_m, y \rangle \\ \langle x, x_1 \rangle & \dots & \langle x, x_m \rangle & d(x, F)^2 + \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= d(x, F)^2 g(x_1, \dots, x_m) + \underbrace{g(x_1, \dots, x_m, y)}_{=0}$$

$$= d(x, F)^2 g(x_1, \dots, x_m)$$

Où le résultat est évident.