

Théorème de Kronecker.

[X-ENSI] p 257

Références: 144, 192

Théorème:

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire dont les racines complexes sont toutes de module ≤ 1 et $P(0) \neq 0$.
Alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

Preuve: Notons $\Omega_n := \{P \in \mathbb{C}[X] / P \text{ unitaire de degré } n \text{ à racines de module } \leq 1 \text{ et } P(0) \neq 0\}$

Soit $P \in \Omega_n$.

Soient $z_1, \dots, z_n$ les n racines complexes de P .

Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires en les $z_1, \dots, z_n$.

$$\text{i.e. : } \sigma_1 = z_1 + \dots + z_n, \dots, \sigma_n = z_1 \dots z_n.$$

On a alors, par les relations coefficients - racines, que $P(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n \in \mathbb{C}[X]$

Donc les σ_i sont entiers.

Or $|z_i| \leq 1$ pour i allant de 1 à n donc, pour $1 \leq p \leq n$, on a:

$$|\sigma_p| = \left| \sum_{I \in \mathcal{P}([1,n])} \prod_{i \in I} z_i \right| \leq \sum_{I \in \mathcal{P}([1,n])} 1 = \binom{n}{p} < +\infty$$

On a donc montré que Ω_n est fini.

On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$ le polynôme:

$$P_k(X) = (X - z_1^k) \dots (X - z_n^k).$$

On a $P_k \in \Omega_n$

On a P_k unitaire, de degré n et dont les racines sont de module ≤ 1 .

Il reste à montrer que $P_k(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Soit $r \in [1, n]$, le coefficient de X^{n-r} dans $P_k(X)$ est

$$a_{n-r}^k = (-1)^r \sigma_r(z_1^k, \dots, z_n^k).$$

Il suit que a_{n-r}^k est un polynôme en les z_i à coefficients entiers et symétrique.

Par le théorème des fonctions symétriques élémentaires, on a :

indice
par exposant $\rightarrow k$
 $a_{m-k} \in \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_m]$ donc $a_{m-k}^k \in \mathbb{Z}$

Finalement, $P_k \in \mathbb{Z}[X]$ et il suit que $k \in \Omega_m$.

Conclusion :

Puisque Ω_m est fini et que chaque élément de Ω_m a donc au plus m racines complexes distinctes, l'ensemble des racines des éléments de Ω_m est fini.

En particulier, pour tout $i \in [1, m]$, $k \mapsto z_i^k$ ne peut être injective i.e. : il existe $k \neq l$ tq $z_i^k = z_i^l$.

Mais alors $z_i^{k-l} = 1$ avec $|k-l| \neq 0$

En somme, pour $i \in [1, m]$ quelconque, z_i est une racine de l'unité. D'où le résultat.

$\Delta z_i \neq 0$
par hypothèse $\downarrow$