Formule de Stirling par les intégrales de Wallis.

[GOO] analyse 3e éd p 130, 219

Recasages : 223, 224, 236

Proposition :
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $I_{2p} = \dots$ et $I_{2p+1} = \dots$

Preuve :
Calculons $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

→ Si $n = 0$: $I_0 = \frac{\pi}{2}$

→ Si $n = 1$: $I_1 = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

→ Soit $n \geq 2$. On a :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

$$= \underbrace{\left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2(x) \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \left(1 - \sin^2(x)\right) dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) - \sin^n x \, dx$$

$$= (n-1) \left(I_{n-2} - I_n\right)$$

Donc $I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$

On déduit alors par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2p} = \frac{(2p-1) \cdots 3}{2p(2p-2) \cdots 2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2) \cdots 2}{(2p+1)(2p-1) \cdots 3}$$

Proposition :
On a : $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2) \cdots 2}{(2p-1) \cdots 1}\right]^2 = \pi$

Preuve :
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

On a $0 < \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x$

Par suite, $0 < I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$ puis $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$

D'où $\lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$ et de même $\lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$

Avec $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{2}{2p+1}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi}$

Or $\frac{2}{2p+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{p}$ donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\right)^2 = \pi$.

Application : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

Preuve :

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}{n!}$.

Mq (u_n) converge.

Pour cela, on pose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = \log\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

On a alors, lorsque $n \to +\infty$:

$$v_n = \log\left(\frac{\frac{\sqrt{n+1}\,(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}{n!}}\right) = \log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right)$$

$$= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

DL ordre 2 $= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$$= \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison, $\sum v_n$ converge.

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum v_1 + \cdots + v_n = \log(u_{n+1}) - \log(u_1)$

Donc $(\log(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l.

Il suit que $(u_n)_n$ CV vers $k' = e^l > 0$.

Ce qui implique, en notant $k = \frac{1}{k'}$, $n! \sim \sqrt{n}\, n^n e^{-n} k$.

Déterminons k : Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Par la formule de Wallis, on a $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$ avec :

$$A_p = \frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 3}\right)^2 = \frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{4p}}{p}\left(\frac{p\, p^{2p}\, \cancel{e^{-2p}}\, k^2}{\sqrt{2p}\,(2p)^{2p}\, \cancel{e^{-2p}}\, k}\right)^2$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\cancel{2^{4p}}}{\cancel{p}} \frac{\cancel{p^{4p+2}}\, k^{\cancel{4}\,2}}{2\cancel{p}\, \cancel{2^{4p}}\, \cancel{p^{4p}}\, \cancel{k^2}}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{k^2}{2}$$

D'où $\frac{k^2}{2} = \pi$ donc $k = \sqrt{2\pi}$ et $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.