Réduction des isométries. [AUD] p 54

Recasages : 148, 151, 158, 161, 191.

Lemme : Soit $f \in O(E)$
Si F est un sous espace de E stable par f, $F^\perp$ est stable par f.

Preuve :
On remarque que $f|_F$ est bijective :
Pour $x \in F$ non nul, on a $\|f|_F(x)\| = \|x\| \neq 0$ donc $f|_F$ est injective donc bijective.
Soit $x \in F^\perp$, montrons que $f(x) \in F^\perp$.
Soit $y \in F$, d'antécédent $y' \in F$.
Alors $\langle f(x), y \rangle = \langle f(x), f(y') \rangle \underset{\text{isométrie}}{=} \langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{y'}_{\in F} \rangle = 0$.
D'où la stabilité de $F^\perp$ par u.

Thm : E s'écrit en somme directe :
$E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ avec $V, W, P_1, \dots, P_n$ stables par f
tels que $f|_V = Id_V$, $f|_W = -Id_W$ et $f|_{P_i}$ une rotation.

Preuve : On procède par récurrence sur $n = \dim E$.

→ Cas $n = 1$: Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \ f(x) = \lambda x$.
Or $f \in O(E)$ donc $\forall x \ \|f(x)\| = \|x\| = |\lambda| \|x\|$ donc (pour $x \neq 0$) on a $|\lambda| = 1$ donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$
donc $f = Id_E$ ou $f = -Id_E$
Ce qui donne $V = E$ ou $W = E$ et la propriété est vérifiée.

→ Cas $n = 2$: On sait que f est produit d'au plus 2 réflexions, donc on a :

- soit $f = Id_E$ et $V = E$
- soit $f = -Id_E$ et $W = E$
- Soit f est une réflexion et $\dim V = \dim W = 1$, $r = 0$
- Soit f est une rotation et $\dim W = \dim V = 0$, $r = 1$

Et c'est tout!

→ **Cas $n \geq 3$** : On suppose la propriété vraie pour tout espace euclidien de dimension $\leq n-1$.

Par le lemme précédent, il suffit de trouver F un sous espace de E stable par f non trivial puis d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$ car $\dim F^\perp = \dim E - \underbrace{\dim F}_{\geq 1} \leq n-1$

Deux cas se présentent alors :

- Soit f admet une valeur propre λ réelle.
  Puisque $\dim F = 1$, on a vu que $f|_F = \pm Id_F$.
  Finalement F la droite vectorielle engendrée par un vecteur propre (non nul) associé à λ convient.

C'est un peu mal dit.

- Sinon f admet une vp λ complexe (non réelle) de vecteur propre associé x (complexe).

Alors on a : $f(\bar{x}) = \overline{f(x)} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ donc $\bar{\lambda}$ est vp de f de $\vec{vp}$ associé $\bar{x}$.

Alors P le plan complexe engendré par x et $\bar{x}$ est stable par f de dimension 2.

Or $\frac{x+\bar{x}}{2}$ et $\frac{x-\bar{x}}{2i}$ sont réels et engendrent P donc $F = P$ convient et on conclut par disjonction de cas.