

Projection sur un convexe fermé.

Références : 205, 208, 213, 219, 253

[BRÉ] p79-80

Étape 1: Existence.

Posons $(v_n) \subset K$ telle que $d_n = |f - v_n| \rightarrow \inf_{v \in K} |f - v| = d$.

$(v_n) \subset K$ de Cauchy.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

On applique l'identité du parallélogramme à $a = f - v_m$ et $b = f - v_n$:

$$\left| \frac{v_m - v_n}{2} \right|^2 + \left| f - \frac{v_m + v_n}{2} \right|^2 = \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2)$$

Donc $\left| f - \frac{v_m + v_n}{2} \right|^2 \leq d^2$ car $\frac{v_m + v_n}{2} \in K$ par convexité.

$$\text{Puis } \left| \frac{v_m - v_n}{2} \right|^2 \leq \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2) - d^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{En suite, } |v_m - v_n| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

dans H complet.

Mais (v_n) est de Cauchy dans K fermé, donc complet, donc (v_n) CV vers un certain $u \in K$ tel que $|f - u| = \inf_K |f - v|$.

Étape (2): (i) équivaut à (ii)

" $\Rightarrow$ ": Soit $u \in K$ tq $|f - u| = \inf_K |f - v|$.

Alors pour $w \in K$, on pose, $\forall t \in [0, 1]$, $v = (1 - t)u + tw \in K$ par convexité.

$$|f - u| \leq |f - v| = |f - u - t(w - u)|$$

$$\text{Il suit: } |f - u|^2 \leq |f - u|^2 - 2\operatorname{Re}(f - u, w - u) + t^2 |w - u|^2$$

$$\text{Puis } 2\operatorname{Re}(f - u, w - u) \leq t |w - u|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{D'où (ii).}$$

" $\Leftarrow$ ": Soit $u \in K$ tq $\forall v \in K, \operatorname{Re}(f - u, v - u) \leq 0$. Soit $w \in K$.

$$\begin{aligned} |f - u|^2 - |f - v|^2 &= |f - u|^2 - |f - u - (v - u)|^2 + |u - v|^2 - |u - v|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}(f - u, v - u) - |u - v|^2 \leq 0 \quad \text{d'où (i)} \end{aligned}$$

Donc étape 2 ok!

$$\begin{aligned} |f - u|^2 &= |f - u - (v - u)|^2 \\ &= |f - u|^2 + |v - u|^2 - 2\operatorname{Re}(f - u, v - u) \\ &= |f - u|^2 - |u - v|^2 \end{aligned}$$

Étape 3: Unicité

Soient $f \in E$ et $u_1, u_2 \in K$ vérifiant (ii):

$$\text{i.e.} \begin{cases} \forall v \in K \operatorname{Re}(f - u_1, v - u_1) \leq 0 \\ \forall v' \in K \operatorname{Re}(f - u_2, v' - u_2) \leq 0 \end{cases}$$

En prenant $v = u_2$, $v' = u_1$ et en sommant, on a:

$$\operatorname{Re}(f - u_1, u_2 - u_1) + \operatorname{Re}(f - u_2, u_2 - u_1) \leq 0$$

$$\text{Puis } \operatorname{Re}(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = \|u_2 - u_1\|^2 \leq 0 \quad \text{i.e.} \quad u_1 = u_2$$

□

Proposition: 1-Lipshitzianité de la projection.

Preuve:

Soient $f_1, f_2 \in E$, $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$. Supp. $u_1 \neq u_2$, sinon TV.

$$\text{Alors on a:} \begin{cases} \forall v \in K, 2\operatorname{Re}(f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \\ \forall v' \in K, 2\operatorname{Re}(f_2 - u_2, v' - u_2) \leq 0 \end{cases}$$

En prenant $v = u_2$, $v' = u_1$ et en sommant:

$$2\operatorname{Re}(f_1 - u_1, u_2 - u_1) + 2\operatorname{Re}(f_2 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$$\text{Il suit, pour (*) :} \\ = \|f_1 - u_2\|^2 + \|f_2 - u_1\|^2 + \|u_2 - u_1\|^2 - \|f_2 - u_1\|^2 - \|f_1 - u_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$$

$$\text{puis } 2\|u_1 - u_2\|^2 \leq \|f_1 - u_1\|^2 - \|f_2 - u_1\|^2 + \|f_2 - u_1\|^2 + \|f_1 - u_2\|^2 \\ \leq 2\operatorname{Re}(f_1 - f_2, u_1 - u_2) \\ \leq \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|$$

$$\text{D'où } \|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \text{CQFD.}$$

□

Proposition: Si $M \subset H$ est un sous-fermé, $f \in H$, $u = P_M f$ vérifie:

$$\begin{cases} u \in M \text{ et } (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M \end{cases}$$

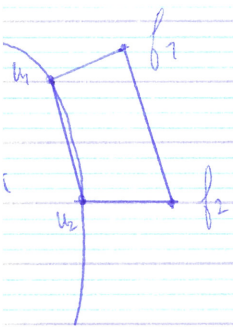
Preuve: (2) donne $\operatorname{Re}(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M$, ce qui nous donne $\operatorname{Re}(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M, \forall v \in M$. Il suit que $\operatorname{Re}(f - u, v) \leq 0 \quad \forall v \in M$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \operatorname{Re}(f - u, v) \leq 0$ donne $\operatorname{Re}(f - u, v) = 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = i\lambda'$ avec $\lambda' \in \mathbb{R}$, alors $\operatorname{Re}(f - u, \lambda v) = \operatorname{Re}(i\lambda'(f - u, v)) \\ = \lambda' \operatorname{Im}(f - u, v) \leq 0$

$$\text{D'où } \operatorname{Im}(f - u, v) = 0$$

$$\text{Dac } (f - u, v) = 0$$



$$2(a, b) = -\|a - b\|^2 + \|a\|^2 + \|b\|^2$$

Laboniere:

on peut plutôt

raffiner les termes

dans la première

équation et ça marche!

Cela signifie
que $(f - u) \perp v$