

Étude de Γ^z sur $\mathbb{R}$.

[600] p315

Recherches: 228, 229, 253, 239, 236

Proposition:
 Γ^z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve:

Montrons que Γ^z est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour cela, on va utiliser le théorème de classe $\mathcal{C}^p$ sous le signe intégral pour $\frac{1}{\Gamma^z}$ entier p quelconque.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Soient $0 < a < b < +\infty$.

On pose $f: (t, x) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

On a: • Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable.

• Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^p$

sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(t, x) = \ln(t)^p e^{-t} t^{x-1}$

• Pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$, on a:

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(t, x) \right| \leq \ln(t)^p e^{-t} (t^{a-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + t^{b-1} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t))$$

$$:= \varphi_p(t)$$

On a l'idée de poser t^{a-1} et t^{b-1} en écrivants $t^{a-1} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^1 \log t$

qu'on cherche à majorer.

D'une part en majorant $(x-1)$

sur $[0, 1]$ car $\log t$ est négatif.

D'autre part, en majorant $(x-1)$

sur $[1, +\infty[$ car $\log t \geq 0$.

On φ_p est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque:

$$\rightarrow \varphi_p(t) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right)$$

$$\rightarrow \varphi_p(t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^a}\right)$$

Donc, par le théorème de classe $\mathcal{C}^p$ sous l'int., Γ^z est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Finalement, p étant quelconque, Γ^z est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition:
 Γ^z est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Preuve:

Par le thm précédent, $\Gamma^{z''}(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\ln(t)^2 e^{-t} t^{x-1}}_{\geq 0} dt \geq 0$
 donc Γ^z est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Proposition:
 Γ^2 est log-concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Preuve:
 On a $\ln(\Gamma^2)' = \frac{\Gamma^2'}{\Gamma^2}$ puis $\ln(\Gamma^2)'' = \frac{\Gamma^2'' \Gamma^2 - (\Gamma^2')^2}{\Gamma^2^2}$

$$\begin{aligned} \text{Or, pour } x > 0, \quad \Gamma^2(x)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln(t) e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right) \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \right) dt \right)^2 \\ \text{C.-S.} \quad &\leq \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &\leq \Gamma^2''(x) \Gamma^2(x) \end{aligned}$$

D'où $\Gamma^2'' \Gamma^2 - (\Gamma^2')^2 \geq 0$ puis $\ln(\Gamma^2)'' \geq 0$

Donc Γ^2 est log-concave.

Proposition:
 Γ^2 admet un minimum entre 1 et 2.
 On a : $\Gamma^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\Gamma^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$

Preuve:
 Mg $\forall x > 0, \Gamma^2(x+1) = x \Gamma^2(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0 \\ \text{On a } \Gamma^2(x+1) &= \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{\uparrow} \underbrace{t^x}_{\downarrow} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \underbrace{\left[-e^{-t} t^x \right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-t} x t^{x-1} dt \\ &= x \Gamma^2(x). \end{aligned}$$

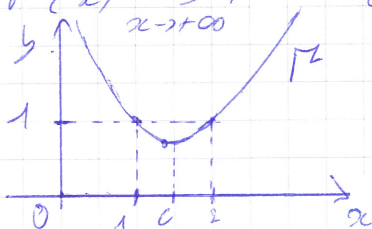
On a donc $\Gamma^2(2) = \Gamma^2(1+1) = 1 \cdot \Gamma^2(1)$

Il suit, par le théorème de Rolle, qu'il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma^2'(c) = 0$. Γ^2 étant convexe, c est un minimum local, puis global de Γ^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Graphes de Γ^2 :

On a, pour $x > 0$, $x \Gamma^2(x) = \Gamma^2(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \Gamma^2(1) = 1$ donc $\Gamma^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$
 et, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma^2(n+1) = n \Gamma^2(n)$, on a $\Gamma^2(n+1) = n!$

donc $\Gamma^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et forcément $\frac{\Gamma^2(x)}{x} = \Gamma^2(x-1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$



Or $x-1 \geq \lfloor x-1 \rfloor$
 donc $\Gamma^2(x-1) \geq \Gamma^2(\lfloor x-1 \rfloor) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$