

Espace de Bergman.

Recherches: 205, 208, 213, 243, 245, 246

[QUE²] p 324-325

Lemme:

Soit K un compact de Ω et $\pi = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$.
Alors, pour tout $f \in B^2(\Omega)$, on a:

$$\sup_{a \in K} |f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \pi} \|f\|_{B^2(\Omega)}.$$

Preuve:

Pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$. (propriété de la moyenne).

On multiplie par f et on intègre θ de 0 à 2π et on obtient:

$$\frac{\pi^2}{2} |f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta \quad (\text{cond. polaire})$$

$$\text{Intég. de Cauchy-Schwarz} \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{B^2(\Omega)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \pi} \|f\|_{B^2(\Omega)}$$

$$\text{D'où } |f(a)| \leq \frac{\pi}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\pi} \pi} \|f\|_{B^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \pi} \|f\|_{B^2(\Omega)}$$

Proposition: $B^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve:

Montrons que $B^2(\Omega)$ est complet.

Soit $(f_n) \subset B^2(\Omega)$ une suite de Cauchy.

Par le lemme, (f_n) est uniformément de Cauchy sur tout compact de Ω .
Puisque Ω est compact implique complet, (f_n) cv unif sur tout compact vers une fct f .
Par le théorème de Weierstrass, (f_n) converge uniformément sur tout cpt vers une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

D'autre part, (f_n) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ complet.

Donc $f_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} g \in L^2(\Omega)$ par
Riesz-Fischer et (f_n) admet une
sous-suite qui cv pp vers g .

On en conclut que $f = g$ et il

suit que $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap L^2(\Omega) = B^2(\Omega)$

(f_n) étant de Cauchy, on fixe $\varepsilon > 0$

et $\exists N \forall n, p \geq N, \|f_n - f_p\|_{B^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon$

On applique le lemme de Fatou pour
 $n \geq N$ fixe, et on obtient:

$$\|f_n - f\|_{B^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f_n(z) - f(z)|^2 dA(z) \leq \liminf_{p \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f_n(z) - f_p(z)|^2 dA(z) \leq \varepsilon^2$$

Donc $f - f_n \in B^2(\Omega)$ puis $f = (f - f_n) + f_n \in B^2(\Omega)$.

Proposition:

(e_m)_{m \in \mathbb{N}} définie par $e_m = \frac{\sqrt{m+1}}{\pi} z^m$ pour $m \in \mathbb{N}$ est une
base Hilbertienne de $B^2(\mathbb{D}) (= B^2)$.

Preuve:

$$\|g\|_{B^2}^2 = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^2}^2 &= \int_D |f(z)|^2 dA(z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta \\ &= \int_0^1 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 r^{n+1} dr \quad (\text{Thm de Parseval}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\pi |c_n|^2 \int_0^1 r^{n+1} dr \quad (\text{Thm de Boggio-Lévi}) \\ &= \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1} \end{aligned}$$

Mg (en) et orthogonormalité:

Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

$$(e_n, e_m) = \int_D e_n(z) \overline{e_m(z)} dA(z) = \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} dr d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{Fubini:} &= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \left(\int_0^1 r^{n+m+1} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right) \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \cdot \frac{1}{n+m+2} \cdot 2\pi \delta_{n,m} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2\pi(n+1)}{2\pi(n+1)} & \text{si } n = m \end{cases} \\ &= \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Mg (en) est une base.

Soit $f \in B^2$.

Puisque pour $f \in B^2(D)$, f est analytique, on écrit comme une SE.

L'égalité précédente se lit $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$, donc $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est une base hilbertienne de B^2 car c'est un système orthogonormal vérifiant l'égalité de Parseval pour tout $f \in B^2$.

Proposition:

Toute fonction $g \in B^2$ s'écrit $g(z) = \int_D \frac{f(w)}{\pi(1-\bar{a}z)^2} dA(z)$

Preuve: Soit $S_a: f \mapsto f(a)$. L'opérateur d'évaluation en a .

S_a est une forme linéaire continue donc par le thm de représentation de Riesz, il existe $K_a \in B^2$ tp $\langle f, K_a \rangle = S_a(f) \quad \forall f \in B^2$.

(e_n) étant une base Hilbertienne, on a:

$$\begin{aligned} K_a(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle K_a, e_n \rangle e_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\langle e_n, K_a \rangle} e_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{e_n(a)} e_n(z) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{\pi} (\bar{a}z)^n = \frac{1}{\pi(1-\bar{a}z)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc pour } f \in B^2 \quad f(a) = \langle f, K_a \rangle = \int_D f(z) \overline{K_a(z)} dA(z) = \int_D \frac{f(z)}{\pi(1-\bar{a}z)^2} dA(z)$$

Théorème (Parseval):

Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ une série trig qui CVU sur $\mathbb{R}$.

On note $S(t)$ la somme.

On a $\sum |a_n|^2 < +\infty$ puis que $\sum |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(t)|^2 dt$

Preuve:

Poseons $S_N(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$.

On a, par inég-Tri- $|S_N(t)| \leq \sum_{n=-N}^N |a_n| e^{int}$.

Par CVU de la série, ^{(sur $S(t)$)} on a : $|S_N(t)| \leq |S_N(t) - S(t)| + |S(t)| \leq 1 + |S(t)|$ pour N assez gr.

Or $S(t)$ est bornée comme fct continue 2π -périodique.

Donc il existe $M > 0$ tq $|S_N(t)| \leq M$.

$$\begin{aligned} \text{Puis } M^2 &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^N a_n e^{int} \sum_{k=-N}^N \bar{a}_k e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^N |a_n|^2 dt \\ &= \sum_{n=-N}^N |a_n|^2 \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \leq M^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$ i.e. : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$.

Puis, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(t)|^2 dt = \sum_{n=-N}^N |a_n|^2$$

Par CVU de $|S_N(t)|$ et car $|S_N(t)|^2 \leq M^2$, l'égalité reste vraie lorsque $N \rightarrow +\infty$, i.e. : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(t)|^2 dt$ (Parseval)

Condition (Parseval pour SE):

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n f(t)$ une SE de RCV $\mathbb{R}$.

Soit $0 \leq r < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$

Preuve: ~~Soit~~ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n e^{int}$ CVU sur $\mathbb{R}$, de somme $f(re^{it})$ car $0 \leq r < R$

Par le théorème précédent, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} < +\infty$ et on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

Théorème (de Weierstrass):
 Soit $(f_n) \subset \mathcal{H}(\Omega)$. $f_n \xrightarrow{uc} f$.
 Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

p 156 H&M QUÉ

Preuve: Soit $K \subset \Omega$ cpt. Par CVU f_n est continue sur K et par donc f continue sur Ω .

Soit γ un chemin entourant K dans Ω .

Par le thm de Cauchy, $f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{w-z} dw$.

Par CVU, on a donc $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$.

On a ensuite, en posant $F(z, w) = \frac{f(w)}{w-z}$:

$\rightarrow \forall z \in K, \int_{\gamma} F(z, w) dw < +\infty$ comme int. d'une fct^o continue sur un chemin.

$\rightarrow$ À $w \in \gamma$ fixé, $F(z, w)$ est holomorphe.

$\rightarrow$ Soit $(z, w) \in K \times \gamma$. $\left| \frac{\partial}{\partial z} F(z, w) \right| = \left| \frac{f(w)}{w} \times \frac{1}{(1 - \frac{z}{w})^2} \right| \leq \left| \frac{f(w)}{w} \right| \frac{1}{1 - \frac{|z|}{|w|}}^2$
 intégrable.

Par le thm d'holomorphie sous l'intégrale, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Proposition: Propriété de la moyenne: p 157 H&M QUÉ.

Soit Ω un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = u + iv$. on a pour $D(a, r) \subset \Omega$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \text{ et } u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Preuve: La formule de Cauchy donne: $\text{Ind}_{\gamma}(a) f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$.

Ici on considère γ le chemin qui réalise un cercle de centre a et de rayon r , i.e. $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto a + re^{i\theta}$.

On a alors $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$ et $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 1$ car $a \in \text{Int}(\gamma)$.

$$\begin{aligned} \text{Puis, il vient: } f(a) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(\theta))}{\gamma(\theta)-a} \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$