

Espaces tangents et extrémum liés. [AVE] p.98-103

Recherches: 159, 214, 215, 219, 206, 148

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d .
Soit $a \in M$.

Proposition:

$T_a M$ est un espace vectoriel de même dimension que M

Preuve:

M étant une sous-variété, il existe U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a et Φ un difféomorphisme $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^{n-d}$ tels que $\Phi(U \cap M) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}$

Supposons, sans perte de généralité, que $\Phi(a) = 0$.

Une courbe γ tracée sur M d'origine a , a pour image $\Phi \circ \gamma$ une courbe tracée sur $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ d'origine $\Phi(a) = 0$ et réciproquement.

Il suffit que $d\Phi(a) \cdot T_a M = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ donc $T_a M = (d\Phi(a))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$
donc $\dim T_a M = d$.

Proposition:

Notant $f_1, \dots, f_{n-d}: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que:

(i) $U \cap M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker } f_i$
(ii) Les $df_i(a)$ sont linéairement indépendantes pour a parcourant U .

Alors $T_a M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker } df_i(a)$

Preuve: Posons $T = \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker } df_i(a)$.

On a $\dim T_a M = d = \dim T$.

Il suffit donc de montrer une inclusion.

$T_a M \subset T$?

Soit $v \in T_a M$ de courbe associée γ . Soit $i \in \{1, \dots, n-d\}$

Alors $df_i(a)(v) = df_i(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d(f_i \circ \gamma)'(0) = d(f_i \circ \gamma)'(0) = 0$

D'où $T_a M \subset T$ donc $T_a M = T$.

Si on $\rightarrow$
les notations sont
plus lourdes.
Cf. version de F.A.

Lemme:
 Soient $a, b_1, \dots, b_n \in E^*$ avec $b_1, \dots, b_n$ linéairement indépendantes et $\text{Ker } a \supset \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } b_i$.
 Alors a est combinaison des b_i .

Preuve:

$(b_1, \dots, b_n)$ forme une famille libre de E^* que l'on complète en $(b_1, \dots, b_m)$.

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base duale associée.

Alors, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tq $a = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$.

$\rightarrow$ On a $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } (b_i) = \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_n) \subset \text{Ker } a$

Donc pour $i \in [n+1, m]$, $0 = a(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j(e_i) = \lambda_i$

D'où $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$.

Théorème (des extrema liés):

Soit M une m -variété de $\mathbb{R}^n$ de dim. d .

Soit $a \in M$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a et

$g_1, \dots, g_{n-d} : U \rightarrow \mathbb{R}$ tq

(i) $U \cap M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker } g_i$

(ii) les $dg_i(a)$ sont lin. indep.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet un extremum en a , alors $df(a)$ est combinaison

linéaire des $dg_i(a)$.

Preuve: On a, par ce qui précède, $T_a M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker } dg_i(a)$

On, pour $v \in T_a M$ de chemin associé γ sur $I \subset \mathbb{R}$,

on a $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un extremum en 0

donc $0 = d(f \circ \gamma)(0) = df(a)v$ i.e. : $v \in \text{Ker } df(a)$.

Donc $\text{Ker } df(a) \supset \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker } dg_i(a)$

D'où, par le lemme, $df(a)$ est comb. linéaire des $dg_i(a)$.

□

"dimension et claire"