L'exponentielle induit un homéomorphisme entre $\mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Injectivité Si A et B sont deux matrices symétriques telles que $\exp A = \exp B$, alors A commute avec $\exp A$ et $\exp B$. Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres réelles de B, il existe f un polynôme interpolateur vérifiant $f(\mathrm{e}^{\lambda_i}) = \lambda_i$. Dès lors, $f(\exp B) = B$ et ainsi A commute avec B. Puisque les matrices A et B sont diagonalisables, elles le sont en particulier simultanément. Soit P une matrice inversible telle que pour D_A et D_B des matrices diagonales l'on ait $A = PD_AP^{-1}$ et $B = PD_BP^{-1}$. Prenant l'exponentielle l'on a $P\exp(D_A)P^{-1} = P\exp(D_B)P^{-1}$ ce qui permet d'écrire $\exp(D_A) = \exp(D_B)$. Or, l'exponentielle réelle est une injection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$. Finalement, $D_A = D_B$ et donc $A = B$.

Surjectivité Si A est symétrique définie positive, il existe P une matrice orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à coefficients strictement positifs telles que $A = PDP^T$. Prenons f un polynôme interpolateur tel que pour tout i entre 1 et n l'on ait $f(\lambda_i) = \ln(\lambda_i)$. Nous obtenons alors

$$\exp(f(A)) = P\exp(f(D))P^{-1} = PDP^T = A.$$

Or $f(A)$ est symétrique, c'est donc un antécédent acceptable.

Bicontinuité Nous savons déjà que l'exponentielle est continue. Si B et $(B_k)_k$ sont des matrices symétriques définies positive avec $(B_k)_k$ convergente vers B, il existe A et $(A_k)_k$ symétriques telles que $B = \exp A$ et pour tout entier k l'on ait $B_k = \exp A_k$. Il s'agit de montrer que $(A_k)_k$ converge vers A. À k fixé, notons $(\lambda_i^{(k)})_{1\leq i\leq n}$ et $(\mu_i^{(k)})_{1\leq i\leq n}$ les valeurs propres respectives de A_k et B_k. Nous énonçons pour j entre 1 et n

$$|\lambda_j^{(k)}| \leq \max_{1\leq i\leq n} |\ln(\mu_i^{(k)})|.$$

Ainsi

$$\rho(A_k) \leq \max_{1\leq i\leq n} |\ln(\mu_i^{(k)})|.$$

Si $(\mu_i)_{1\leq i\leq n}$ désigne les valeurs propres de B, prenant la limite supérieure cela donne

$$\limsup_k \rho(A_k) \leq \limsup_k \left\{ \max_{1\leq i\leq n} |\ln(\mu_i^{(k)})| \right\} \leq \max_{1\leq i\leq n} |\ln(\mu_i)|$$

Puisque $\|A_k\|_2 = \rho(A_k)$, la suite $(A_k)_k$ est bornée. Soit $(A_{\phi(k)})_k$ une sous-suite convergente vers une valeur d'adhérence A'.

$$\exp A' = \lim_k \exp A_{\phi(k)} = \lim_k B_{\phi(k)} = B = \exp A.$$

Par injectivité $A' = A$. La valeur d'adhérence ne dépend pas de la sous-suite donc

$$\lim_k A_k = A.$$