Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

103 - 106 - 204
108 - 158 - 161

Francinou Al 3 p 67

Lemme 1: $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Preuve: $n=1$: $SO_1(\mathbb{R}) = \{1\}$, vrai.

Soit $n \geq 2$. Par réduction des isométries vectorielles, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(I_r, -I_s, R(\theta_i) \dots)$ tq $A = PDP^{\perp}$, $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ $\theta_i \in]0;\pi[$

$\det A = 1$ donc s est pair.

Donc on peut écrire $I_s = \begin{pmatrix} R(\pi) & & \\ & \ddots & \\ & & R(\pi) \end{pmatrix}$

Soit $\gamma : [0;1] \to SO_n(\mathbb{R})$

$t \mapsto P\,\mathrm{diag}(I_r, R(t\pi), \dots, R(t\theta_i) \dots)P^{\perp}$

γ est définie, continue, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$.

Par transitivité et réflexivité de la relation "relié par un chemin", $SO_n(\mathbb{R})$ est c.p.a.

Th2: $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Preuve: Soit $G \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$, distingué.

H la composante connexe de G contenant I_3

• Soit $\lambda : H \times H \to G$

$(h_1; h_2) \mapsto h_1 \cdot h_2^{-1} = h_1 \cdot \mathrm{com}(h_2)^T$

λ est continue car polynomiale. Alors $\lambda(H \times H)$ est un connexe de G, contenant I_3 ($\lambda(I_3, I_3) = I_3$). Donc $\lambda(H \times H) \subseteq H$.

Donc $\cancel{H \leq G}$ $H \triangleleft G$

* Soit $\sigma \in SO_3(\mathbb{R})$

et $\alpha : H \to G$

$h \mapsto \sigma h \sigma^{-1}$ bien définie car G est distingué et continue

Alors $\alpha(H) = \sigma H \sigma^{-1}$ est une partie connexe de G contenant I_3. Donc $\alpha(H) \subseteq H$

Donc H est distingué.

* Sq H n'est pas trivial.

Soit $A : H \to [0;\pi]$ qui associe à chaque élément de H son angle géométrique

$A(h) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\mathrm{Tr}(h) - 1}{2}\right)$

A est donc continue.

~~Donc~~ H est connexe et non trivial donc $A(H)$ connexe de $[0;\pi]$ contenant $A(I_3)=0$, non réduit à celui-ci. Donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\frac{\pi}{N} \in A(H)$. Soit r est $\frac{\pi}{N}$

Donc $r^N \in H$ est un retournement.

Comme H est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$, il contient tous les retournements donc $H = SO_3(\mathbb{R})$.

Donc $G = SO_3(\mathbb{R})$

* Sq $H = \{I_3\}$, alors on définit $\forall g \in G$

$$\beta_g : SO_3(\mathbb{R}) \to G$$
$$\sigma \mapsto [\sigma, g] = \sigma g \sigma^{-1} g^{-1}$$

Par connexité et continuité, $\beta_g(SO_3(\mathbb{R})) \subseteq H = \{I_3\}$

Donc $\forall \sigma \in SO_3(\mathbb{R})$, $\sigma g = g \sigma$

Donc $g \in Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{I_3\}$ donc $G = \{I_3\}$

Donc $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Outils :

→ Réduction des isométries : Gou p268

→ Par récurrence sur la dimension.

. Si on a une v.p.r. ε avec $x \in E_\varepsilon(u)$

$\varepsilon = \pm 1$ et $F = Vect(x)$ est stable par u

donc $F^\perp$ aussi $\left\{ \begin{array}{l} \text{avec } y \in F^\perp \text{ et } z \in F \\ \langle u(y); z \rangle = \langle u(y); u(z') \rangle \\ \quad = \langle y; z' \rangle = 0 \end{array} \right.$

. sinon on prend $v = u + u^*$ symétrique donc $\lambda \in Sp(v)$

$(u+u^*)(x) = \lambda x$ donc $u^2(x) + x = \lambda u(x)$

et $(x; u(x))$ libre donc $u^2(x) = \lambda u(x) - x$

Donc $F = Vect(x; u(x))$ stable par u

Puis on utilise $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Mat_{u|F}$ avec

$NN^T = N^T N = I_n$ avec $b \neq c$

Les retournements engendrent $SO_n(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{Perrin p142+}}$

⊕ $Z(SO_n(\mathbb{R})) = \{-I_n; I_n\} \cap SO_n(\mathbb{R})$

⊕ Les retournements de $\mathbb{R}^n$ sont conjugués.