

Théorème de Runge (faible)

204
245
209
203
243

QUE
Topologie
P 140

I. Théorème: Soit K compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe. Alors $\forall a \in \mathbb{C} \setminus K$, $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes sur K . $z \mapsto \frac{1}{z-a}$

I. Idée de Preuve: On note A l'ensemble des a qui respectent la propr. On montre $A \neq \emptyset$, ouvert et fermé donc par connexité $A = \mathbb{C} \setminus K$

Preuve: 1) Objets:

$P(K) :=$ adhérence des polynômes dans $\mathcal{C}^0(K; \mathbb{C})$ muni de la ^{norme} convergence uniforme.

$P(K)$ est stable par somme et produit (par compacité)

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus K$. $\varphi_a: z \mapsto \frac{1}{z-a} \in \mathcal{C}^0(K; \mathbb{C})$

On veut montrer que $\varphi_a \in P(K)$

Soit $A := \{a \in \mathbb{C} \setminus K \mid \varphi_a \in P(K)\}$

2) $A \neq \emptyset$: $R := \sup \{ |z|; z \in K \}$

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus K$ tq $|a| > R$ (existe car K borné).

Alors $\forall z \in K$, $\varphi_a(z) = \frac{-1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}}$

$$\varphi_a(z) = -\frac{1}{a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{a} \right)^n \text{ car } \left| \frac{z}{a} \right| < 1$$

$$= -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

Or $\forall z \in K$, $\left| \frac{z^n}{a^{n+1}} \right| < \frac{1}{R} \left(\frac{R}{|a|} \right)^n$ qui est le terme d'une série convergente. Donc la série converge normalement.

En posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(z) = -\sum_{i=0}^n \frac{z^i}{a^{i+1}}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall z \in K, \left| \frac{1}{z-a} - P_n(z) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{z^i}{a^{i+1}} \right|$$

Donc $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_a$ donc $a \in A \neq \emptyset$.

3) A est un fermé: Dire que A est fermé dans $\mathbb{C} \setminus K$ revient à dire que $A \cap (\mathbb{C} \setminus K)$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Donc que $A \cap (\mathbb{C} \setminus K) = \bar{A} \cap (\mathbb{C} \setminus K) = A \cap (\mathbb{C} \setminus K)$

~~Ainsi~~ $A \cap (\mathbb{C} \setminus K) \subset \bar{A} \cap (\mathbb{C} \setminus K)$. Considérons

$a \in \bar{A} \cap (\mathbb{C} \setminus K)$. Soit $d = d(a; K)$.

$d > 0$ car sinon $a \in \bar{K} = K$ (fermé) donc $a \in K \cap \bar{A}$ ^{dronde}

Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. À partir d'un certain rang n_0 , $\forall n \geq n_0$, $|a - a_n| < \frac{d}{2}$

Alors pour $z \in K$, on a

$$\left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{(z - a)(z - a_n)} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{d \times \frac{d}{2}} \\ \leq \frac{2}{d^2} |a_n - a|$$

Or $(\varphi_{a_n}) \in (P(K))^N$ et $\|\varphi_{a_n} - \varphi_a\| \leq \frac{2}{d^2} |a_n - a|$

Et donc φ_a est limite uniforme d'éléments de la forme φ_{a_n} et donc $\varphi_a \in \overline{P(K)} = P(K)$ (car adhérence)

Donc $a \in K \cap (\mathbb{C} \setminus K)$. Donc A fermé.

4) A est un fermé ouvert: On a $A \cap K^c$ est ouvert de $\mathbb{C}$.

Soit $a \in A$ et $d = d(a; K) > 0$. Montrons que $\overline{B}(a; \frac{d}{2}) \subset A$

Soit $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| \leq \frac{d}{2}$. Soit $z \in K$ alors

$$\frac{1}{z - (a+h)} = \frac{1}{z - a} \times \frac{1}{1 - \frac{h}{z - a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}}$$

En effet, $\forall z \in K, |h| \leq \frac{d}{2} < d = d(a; K) \leq |z - a|$

et donc $\left| \frac{h}{z - a} \right| < 1$.

$$\text{De plus } \left| \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{d^n}{2^n} \frac{1}{|z - a|^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n d}$$

$$\text{Ceci étant vrai } \forall z \in K, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_a(z)^{n+1} h^n$$

converge uniformément vers $\varphi_{a+h}(z)$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_a^{n+1} h^n \in P(K)$ donc $a+h \in A \forall h$.

Donc $\overline{B}(a; \frac{d}{2}) \subset A$ donc A ouvert de $\mathbb{C} \setminus K$.

5) Conclusion: A est ouvert - fermé ^{non vide} de $\mathbb{C} \setminus K$ non vide. Qui est connexe. Donc $A = \mathbb{C} \setminus K$.