

Équivalence des normes en dimension finie et Th de Riesz

Gau-A
PSO-SL
203; 206;
208;

Donc d'après le th. des bornes atteintes, $\exists x_0 \in S$
tq $\beta := \min_{x \in S} \|x\| = \|x_0\| > 0$

Alors $\forall x \in E$, $\|x\| = \|x\|_\infty \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|}_{\in S} \geq \beta \|x\|_\infty$

Ainsi $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$; par transitivité $\square$

Exercices: Th 1: Soit E un K -e.v.

Si E est de dim finie, toutes les normes sont équivalentes

Th 2 (de Riesz): $\dim E < +\infty$ si $B_E(0;1)$ est compacte.

Preuve du th 1: Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\|\cdot\|$ une norme sur E .

$$\rightarrow \forall x \in E, \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \alpha \|x\|_\infty$$

$$\text{Avec } \alpha = \sum_{i=1}^n \|e_i\| \text{ et } \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\rightarrow \text{Posons } \varphi : (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$$

C'est une isométrie pour $\|\cdot\|_\infty$ et est donc 1-lipschitzienne
où fonction continue. $S := \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\}$

$$= \varphi(\{x \in K^n \mid \|x\|_\infty = 1\})$$

S est compacte comme image d'un compact par φ .

$\|\cdot\|$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ car α -lipschitzienne car

$$\forall (x, y) \in E^2, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|_\infty$$

Preuve du th 2: Lemme: Si $\dim E < +\infty$ les compactes
sont les fermés-bornés:

$\rightarrow$ Soit $(x_n) \in E^n$, bornée par $M > 0$, alors les
coordonnées $x_{n,i}$ sont bornées dans $(K; |\cdot|)$

Par extraction diagonale, on peut construire

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \rightsquigarrow \text{tq } \forall i \in [1; \dim E], (x_{\varphi(n), i}) \text{ converge}$$

(à l'aide de la propriété de Bolzano-Weierstrass).

Ainsi $(x_{\varphi(n)})$ converge donc tout fermé
borné vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Et est donc compact.

$\Rightarrow$ C'est donc en particulier le cas de $B_E(0;1)$

$\Leftarrow$ Soit E de dimension infinie.

Soit $\overline{B_E(0;1)}$ est compacte.

On a donc $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ tq $\overline{B_E(0;1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^r B_E(x_i;1)$

Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$. $F \neq E$

Soit $x \in E \setminus F$. F est de dim. finie donc $\exists y \in F$

tq $\|x-y\| = d(x; F) > 0$ (*)

Posons $x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. On a $d(x_0; F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\|$
 $\leq \|x_0 - 0\| = 1$
car $0 \in F$

$$\forall z \in F; \|x_0 - z\| = \frac{1}{\|x-y\|} \left\| x - \underbrace{(y + \|x-y\|z)}_{\in F} \right\|$$

$$\|x_0 - z\| \geq \frac{d(x; F)}{\|x-y\|} = 1$$

Donc $d(x_0; F) = 1$. Or $x_0 \in \overline{B_E(0;1)}$ donc $\exists i \in [1; r]$

tq $x_0 \in B_E(x_i; 1)$.

Donc $1 > \|x_0 - x_i\| \geq d(x_0; F) = 1$: Absurde.

Preuve de (*): $y \mapsto \|y\|$ est continue et coercive sur F qui est de dimension finie - donc les fermés bornés de F sont compacts.

~~On prend $z \in F$ quelconque $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$~~
 $\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$