

Morphismes continus de S^1 dans $GL_n(\mathbb{R})$

102-106-152-155-156
Francine AL-2.

Th: Ils sont exactement de la forme :

$$e^{it} \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{k_r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

avec $Q \in GL_n(\mathbb{R})$; $k_i \in \mathbb{Z}^*$; $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Lemme 2: les morphismes continus de $\mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$
sont les $t \mapsto e^{tA}$; $A \in M_n(\mathbb{R})$

Preuve: Analyse: Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un tel morphisme

Supposons le dérivable: $\varphi(s+t) = \varphi(s) \varphi(t)$

$$\text{Donc } \varphi'(s+t) = \varphi'(s) \varphi(t) \quad \left(\frac{d}{ds} \right)$$

$$\text{Donc } \varphi'(t) = \varphi'(0) \varphi(t) \quad (s=0)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}; \varphi(0+t) = \varphi(t) = \varphi(t) \times \varphi(0)$$

$$\text{Donc } \varphi(0) = I_n$$

$$\text{Donc } \varphi(t) = e^{t\varphi'(0)} \quad \text{On prend } A = \varphi'(0)$$

Montrons que φ est dérivable:

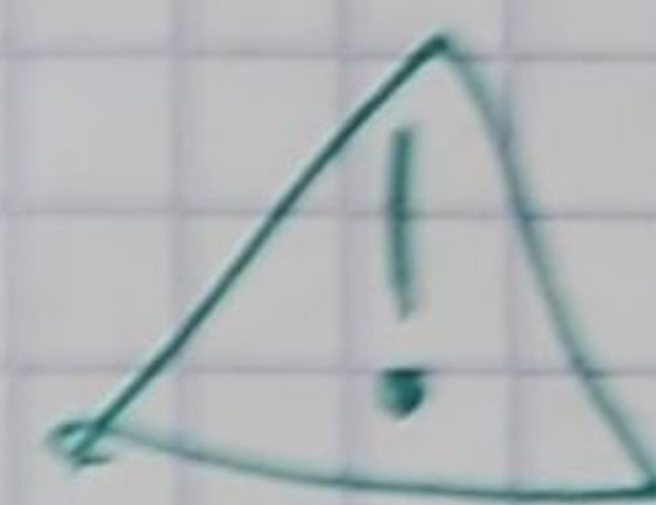
$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \varphi(t) \frac{\varphi(h) - I_n}{h}$$

On $\varphi(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ donc il suffit de justifier de la dérivabilité en 0.

Soit $F: t \mapsto \int_0^t \varphi(s) ds$; e^1

$$F(h) = \int_0^h \varphi(s) ds = \varphi(h) \int_{-h}^0 \varphi(s) ds$$

$$= \varphi(h) \times (-F(-h))$$



$$\text{On } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-h)}{h} = -I_n$$

Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, pour h petit, $-F(-h)$ est inversible.

$$\text{Donc } \varphi(h) = F(h) (-F(-h))^{-1}$$

Comme $u \mapsto u^{-1}$ est C^∞ dans $GL_n(\mathbb{R})$, on a, par opération φ dérivable en 0 et donc dérivable.

Synthèse: ok

Démonstration du théorème:

$\rightarrow$ L'application de la forme donnée est bien définie car R_θ ne dépend que de $\theta [2\pi]$.

De plus $R_{(ts)k} = R_{tk} \times R_{sk}$ (composition de rotations)

Enfin pour $z_0 \in S^1$, $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tq $e^{it_0} = z_0$

Donc $f: t \mapsto e^{it}$ réalise un homéomorphisme de I fermé, contié en t_0 , de longueur $< 2\pi$ vers son image.

Quand $z \rightarrow z_0$; $R_{tk} = R_{f^{-1}(z)k} \rightarrow R_{f^{-1}(z_0)k} = R_{t_0k}$

La fonction est donc continue en z_0 et donc sur S^1 .

Analyse: Soit $\varphi: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme continu et $\forall t \in \mathbb{R}$; $\varphi(t) = \varphi(e^{it})$

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est continue donc de la forme $\varphi(t) = e^{At}$; $A \in M_n(\mathbb{R})$.

φ est 2π -périodique donc $e^{tA} = e^{2\pi A} \times e^{tA}$ (A commute avec A)

Donc $e^{2\pi A} = I_n$ dont les valeurs propres sont 1 donc $e^{2\pi \lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda \in i\mathbb{Z}$.

Montrons que A est diagonalisable:

Dans $\mathbb{C}$, la décomposition de Dunford :

$A = D + N$ où $D \in M_n(\mathbb{C})$ ^{diagonalisable}; N nilpotente et $DN = ND$.

Alors $e^{2\pi A} = e^{2\pi D} \times e^{2\pi N}$ ($DN = ND$)

D et A ont les mêmes valeurs propres donc $e^{2\pi D} = I_n$ et donc $e^{2\pi N}$ aussi.

Soit $N \neq 0_n$, alors $\text{Ker } N \neq \text{Ker } N^2$ (car nilpotente).

Soit $X \in \text{Ker}(N^2) \setminus \text{Ker}(N)$, $X \neq 0$ et $e^{2\pi N} X = X + 2\pi N X \neq X$: absurde.

Donc $N = 0_n$ donc $A = D$ donc A est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont donc à densité conjuguées donc on a $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq

$A = P \text{Diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_r, -ik_r, 0, \dots, 0)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$e^{tA} = P \text{Diag}(e^{ik_1 t}, e^{-ik_1 t}, \dots, e^{ik_r t}, e^{-ik_r t}, 1, \dots, 1)$

Or $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1}$

Donc on a $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $e^{tA} = Q B Q^{-1}$

$\rightarrow e^{tA}$ et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, mais

qu'elles le sont dans $M_n(\mathbb{R})$: avec $Q = Q_1 + iQ_2$

$e^{tA} (Q_1 + iQ_2) = (Q_1 + iQ_2) B$ donc $\begin{cases} e^{tA} Q_1 = Q_1 B \\ e^{tA} Q_2 = Q_2 B \end{cases}$

Soit $P(X) = \det(Q_1 + X Q_2) \neq 0$ car $P(i) \neq 0$

Donc $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $P(x) \neq 0$ et on a

$e^{tA} (Q_1 + x Q_2) = (Q_1 + x Q_2) B$ avec $Q_1 + x Q_2 \neq 0$

D'où la propriété.