

Envelope convexe de $O_n(\mathbb{R})$

157-158-159-161
191-208.
QUE - Analyse p 205
BNP - Olympe p 37

Lemme 1: Hahn-Banach faible.

Soit H un $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert et C convexe non vide fermée de H . Alors $\forall x \in H \setminus C, \exists f \in H^*$ continue tq $f(x) > \sup_{y \in C} f(y)$

Lemme 2: Soient H un $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert et $A \subset H$
Alors $(x \in \overline{\text{Conv}(A)}) \Leftrightarrow (\forall f \in H^*, f(x) \leq \sup_{y \in \overline{\text{Conv}(A)}} f(y))$

Th 3: Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

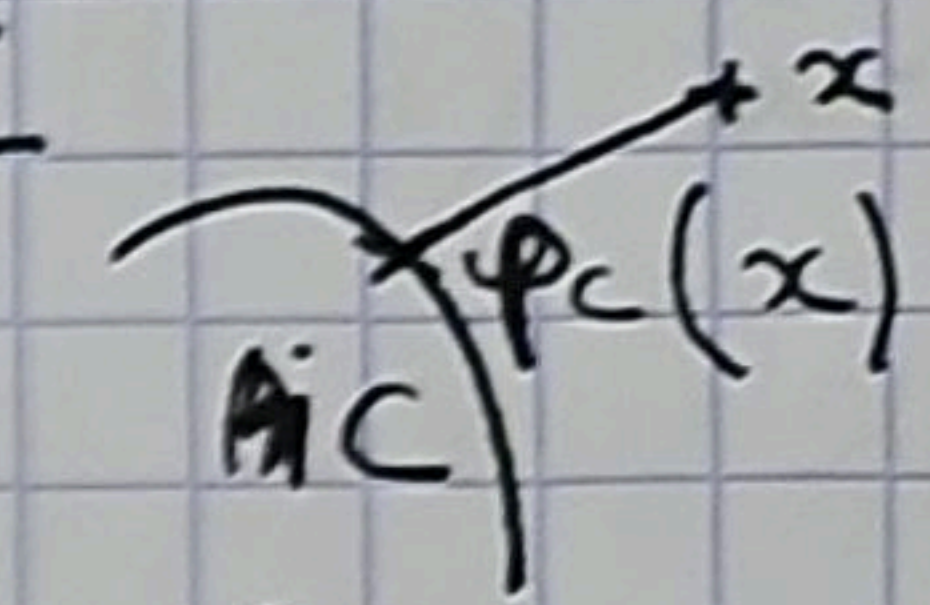
Soient $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme subordonnée sur $O_n(\mathbb{R})$. L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité, B , pour $\|\cdot\|$.

Remarque: On utilise en conclusion du th. de Carathéodory:

Th: L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble A d'un esp. affine de dim n est l'ensemble des barycentres à $n+1$ points à coeff. positifs

Corollaire: L'enveloppe convexe d'un compact en dim finie est compacte.

Preuves: Lemme 1: Soit $x \in H \setminus C$. On note

$a = p_C(x)$ la projection de x sur C .
On pose $f = \langle a - x | \cdot \rangle$ linéaire. 
 $x \notin C$ donc $x \neq a$ donc $f(a-x) = \|a-x\|^2 > 0$

Donc $f(a) > f(x)$.

Soit $y \in C$, par la caractérisation de la projection sur un convexe fermé, $\langle x-a | y-a \rangle \leq 0$

Donc $f(a) \leq f(y)$. Et donc $\forall y \in C, f(x) < f(a) \leq f(y)$

On pose $g = -f \in H^*$. On a $\forall y \in C, g(y) \leq g(a) < g(x)$

En passant au sup sur C , on a le résultat.

Lemme 2: La contraposée du lemme 1 donne, avec

$C = \overline{\text{Conv}(A)}$ fermé et convexe que $\forall x \in H$:
 $(\forall f \in H^*, f(x) \leq \sup_{y \in \overline{\text{Conv}(A)}} f(y)) \Rightarrow x \in \overline{\text{Conv}(A)}$

Réciproquement, si $x \in \overline{\text{Conv}(A)}$ et $f \in H^*$,
par définition du sup, $f(x) \leq \sup_{y \in \overline{\text{Conv}(A)}} f(y)$

Th 3: $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Donc, d'après Carathéodory $\overline{\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))}$ est compact donc égal à son adhérence

Étape 1: Éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$

Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, d'après le th. de représentation de Riesz, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^* B)$
 $\exists \Pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(X) = \text{Tr}(X \Pi^T)$

Étape 2: $\Pi \in \mathcal{B} \subset \text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

i.e., mq $\forall X \in \mathcal{B}, \text{Tr}(X \Pi^T) \leq \sup_{U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(U \Pi^T)$

Par décomposition polaire: $\Pi^T = U_0 S$ avec $U_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
 et $S \in \mathcal{L}_n^+(\mathbb{R})$

Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs propres de S et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base orthonormale de vecteurs propres associés :

$$\begin{aligned} \rightarrow \sup_{U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(U \Pi^T) &\geq \sup_{U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(U \Pi^T) \\ &\geq \text{Tr}(U_0^{-1} \Pi^T) \quad (\text{car } U_0^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \\ &\geq \text{Tr}(S) \quad (S = U_0^{-1} \Pi^T) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (S \text{ diag.}) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \|S e_i\|_2 \quad (\text{par def des vect. propres}) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \forall X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ comme } X^* = X^T : \\ \text{Tr}(X \Pi^T) = \sum_{i=1}^n \langle X \Pi^T e_i | e_i \rangle$$

$$\text{Tr}(X \Pi^T) = \sum_{i=1}^n \langle \Pi^T e_i | X^T e_i \rangle$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|\Pi^T e_i\|_2 \cdot \|X^T e_i\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|\Pi^T e_i\|_2 \quad (\text{car } X \in \mathcal{B})$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|S e_i\|_2 \quad \text{car } U_0 \text{ orthogonale}$$

$$\leq \sup_{U \in \text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \text{Tr}(U \Pi^T) \quad \text{par le point précédent.}$$

$$\text{Ainsi } \text{Tr}(X \Pi^T) \leq \sup_{U \in \text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \text{Tr}(U \Pi^T) = \sup_{U \in \text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \text{Tr}(U \Pi^T)$$

Étape 3: Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $X \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Xx\|_2 = \|x\|_2$

Donc $\|X\| \leq 1$ donc $X \in \mathcal{B}$

Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$ qui est convexe.

Donc $\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ étant le plus petit convexe
 $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \in \mathcal{B}$.

Donc $\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{B} \quad \square$

Amesos : env. convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Th de Carathéodory: Soit un esp. affine de dim n et A un sous-ensemble.

On note Γ l'ensemble des barycentres à coeff. positifs d'au plus $n+1$ points de A . $\bigcap_q \text{Conv}(A) = \Gamma$

$\rightarrow \Gamma \subset \text{Conv}(A)$ immédiat.

$\rightarrow$ Soit $x \in \text{Conv} A$, $x = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_i$ où $p \in \mathbb{N}^*$

Si $p \leq n$ alors $x \in \Gamma$

Sinon $(a_1, \dots, a_{p+1})$ est liée affinement.

Quitte à échanger, $a_1 = \sum_{i=2}^{p+1} t_i a_i$

Avec $\mu_1 = 1$ et $\mu_i = -t_i$ ($i \geq 2$) on a $\mu_1 > 0$,

$\sum_{i=1}^n \mu_i a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$

Soit k tq $\frac{\lambda_k}{\mu_k} = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid i \in [1; p+1] ; \mu_i > 0 \right\}$

Alors $a_k = \sum_{i \neq k} \frac{-\mu_i}{\mu_k} a_i$ et $x = \sum_{i \neq k} \underbrace{\left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right)}_{S_i = 1} a_i$

Donc Enfin si $\mu_i > 0 ; \frac{\lambda_i}{\mu_i} > \frac{\lambda_k}{\mu_k}$ donc $S_i \geq 0$

Si $\mu_i \leq 0 ; S_i \geq 0$, Donc x est barycentre de p points. On conclut par récurrence.

O_n est compact:

$\rightarrow$ O_n est fermé:

Soit $\phi: \Pi_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \Pi_n(\mathbb{R})$ continue car bilinéaire en dim finie.
 $(A; B) \mapsto A^T B$

Soit $\psi: \Pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{R})^2$ continue.
 $A \mapsto (A; A)$

$O_n(\mathbb{R}) = (\phi \circ \psi)^{-1}(\{I_n\})$ donc est fermé.

$\rightarrow$ O_n est borné: $\|A\| = 1$ pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$
où $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée par la norme euclidienne.

$\rightarrow$ Donc O_n est compact.

Projection sur un convexe compact (fermé et borné)

$\exists ! P_C: E \rightarrow C$ tq $\forall x \in E$, $d(x; C) = \|x - P_C(x)\|$

On a donc $\forall x \in E$, $P_C(x)$ l'unique point de C vérifiant:
de manière équivalente:

(1) $\forall y \in C$, $\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|$

(2) $\forall y \in C$, $\langle x - P_C(x) \mid y - P_C(x) \rangle \leq 0$

Existence et unicité: Soit $S = d(x; C)$ et
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \overline{B(x; S + \frac{1}{n})} \cap C$

On montre que $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Soit $y, z \in F_n$, $4\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2\|y-x\|^2 + 2\|z-x\|^2$

Il s'en suit $\geq \|y+z-2x\|^2 + \|y-z\|^2$

Donc $\|y-z\|^2 \leq 4\left(\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 - \left\|\frac{y+z}{2} - x\right\|^2\right)$

$\frac{y+z}{2} \in C$ donc $\|y-z\|^2 \leq 4\left(\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 - \delta^2\right)$
 $\leq \frac{8\delta}{n} + \frac{4}{n^2} \rightarrow 0$

Par les fonctions embraillées $P_C(x)$ existe et est unique.

• (1) $\Rightarrow$ (2): Soit $y \in C$ et $\theta \in [0; 1]$

Alors $\theta y + (1-\theta)P_C(x) \in C$ et plus éloigné de x

que $P_C(x)$ donc $\|x - P_C(x)\|^2 \leq \|x - P_C(x) - \theta(y - P_C(x))\|^2$

Avec c.s.; $2\theta \langle x - P_C(x) | y - P_C(x) \rangle \leq \theta^2 \|y - P_C(x)\|^2$

Donc $\langle x - P_C(x) | y - P_C(x) \rangle \leq \frac{\theta}{2} \|y - P_C(x)\|^2$

Avec $\theta \rightarrow 0^+$; $\langle x - P_C(x) | y - P_C(x) \rangle \leq 0$

• 2 $\Rightarrow$ 1: $\|x-y\|^2 = \|x - P_C(x)\|^2 + \|y - P_C(x)\|^2 - 2\langle x - P_C(x) | y - P_C(x) \rangle$
 $\geq \|x - P_C(x)\|^2$