

Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices stochastiques irréductibles:

102-153 (104)
Francis X-ENS-AL2

Théorème: Soit A une matrice stochastique irréductible. Alors $\rho(A) = 1$ et $\text{Sp}(A) \cap S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ est un sous-groupe des racines de l'unité.

Preuve: $1 \in \text{Sp}(A)$ de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\rho(A) \geq 1$.
Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé.

Soit $k_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tq $|X_{k_0}| = \|X\|_\infty > 0$. Alors avec l'inégalité triangulaire puis stochasticté:

$$|(AX)_{k_0}| \leq \sum_{l=1}^n A_{k_0,l} |X_l| \leq |X_{k_0}| \sum_{l=1}^n A_{k_0,l} = |X_{k_0}|$$

or $(AX)_{k_0} = \lambda X_{k_0}$ donc $|\lambda| |X_{k_0}| \leq |X_{k_0}|$ donc $|\lambda| \leq 1$.

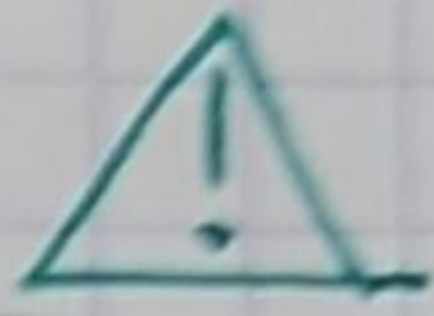
Donc $\rho(A) \leq 1$. Donc $\rho(A) = 1$.

→ Montrons que $\text{Sp}(A) \cap S^1$ est un sous-groupe des racines de l'unité:

→ $1 \in \text{Sp}(A) \cap S^1$

→ si $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap S^1$ alors $\lambda^{-1} = \bar{\lambda} \in S^1$ mais étant donné que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, $\chi_A(\lambda) = \chi_A(\bar{\lambda}) = 0$

Donc $\lambda^{-1} \in \text{Sp}(A) \cap S^1$.

Montrons la stabilité par produit: 

Prop Lemme: Soit A stochastique, $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap S^1$ de vect. propre X . Alors $\forall l \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $A_{k_0,l} X_l = A_{k_0,l} \lambda X_{k_0}$

Preuve: Comme $|\lambda| = 1$; (*) est une série d'égalité donc les termes de la somme sont positivement liés: $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $\forall l \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $A_{k_0,l} X_l = A_{k_0,l} |X_l| e^{i\theta}$ (1)

En outre, par def de k_0 , $\forall l \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $A_{k_0,l} |X_l| \leq A_{k_0,l} |X_{k_0}|$

De plus s'il existait $l \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tq $A_{k_0,l} |X_l| < A_{k_0,l} |X_{k_0}|$ alors on sortirait du cas d'égalité.

Donc $\forall l \in \llbracket 1; n \rrbracket$; $A_{k_0,l} |X_l| = A_{k_0,l} |X_{k_0}|$ (2)

En combinant (1) et (2): $\sum_{l=1}^n A_{k_0,l} X_l = \sum_{l=1}^n A_{k_0,l} |X_{k_0}| e^{i\theta}$

Donc $\lambda X_{k_0} = |X_{k_0}| e^{i\theta}$

En réinjectant dans (1): $A_{k_0,l} X_l = A_{k_0,l} \lambda X_{k_0}$ □

Reprenons la preuve du théorème :

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap S^1$ de vecteur propre X .

Par irréductibilité de A ; $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tq $A_{k_0;l}^m > 0$

Or A^m est stochastique. Donc avec $\lambda^m \in \text{Sp}(A^m) \cap S^1$

et le lemme: $A_{k_0;l}^m X_l = A_{k_0;l}^m \lambda^m X_{k_0}$

$$\div A_{k_0;l}^m > 0 \rightarrow X_l = \lambda^m X_{k_0}$$

$$\text{Donc } |X_l| = |X_{k_0}|$$

Donc toutes les composantes de X ont le même module (maximal).

Soient $\lambda, \mu \in \text{Sp}(A) \cap S^1$ de vect. propres resp. X et Y .

Posons $Z = (X_k Y_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, mg Z est vect. propre.

$Z \neq 0$ car sinon X ou Y le serait (même module).

$$\text{Pour } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, (AZ)_k = \sum_{l=1}^n A_{k;l} X_l Y_l$$

Or X_k est de module maximal donc

$$\text{d'après le lemme, } A_{k;l} X_l = \lambda A_{k;l} X_k$$

$$\text{Donc } (AZ)_k = \lambda X_k \sum_{l=1}^n A_{k;l} Y_l = \lambda \mu X_k Y_k$$

$$(AZ)_k = \lambda \mu Z_k$$

$$\text{Donc } \lambda \mu \in \text{Sp}(A) \cap S^1 \quad \square$$

Remarque:

$$\rightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+) \text{ stochastique, } \text{rix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_A(1)$$

Il suit que si A, B stochastique:

$$(AB)X = A(BX) = AX = X \text{ donc } AB \text{ stochastique}$$

$\rightarrow$ le lemme permet de montrer que les v.p. sont de modules maximaux si on peut diviser par $A_{k;l} \neq 0$ on a besoin de l'irréductibilité pour ça (quitte à utiliser A^m)