

Théorème 1: Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie. Alors il existe une base orthonormale B de E dans laquelle la matrice u a la forme par bloc:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & 0 \\ & R(\theta_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & R(\theta_s) & \\ & & & E_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & E_s \end{pmatrix} \quad (*)$$

où $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

avec $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $E_i \in \{-1; 1\}$

Démonstration: Par récurrence sur la dimension n .

I: $n=1$: $[u]_B = (1)$ ou (-1) pour toute base.

HI: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, sq la prop. est vraie $\forall k \leq n$

→ cas 1: u admet une valeur propre réelle

λ , soit x un vecteur propre associé.

$\|u(x)\| = |\lambda| \|x\| = \|x\|$ donc $\lambda = \pm 1$

$F = \text{Vect}(x)$ est stable par u d'où $F^\perp$ aussi

→ Preuve: $\forall x \in F^\perp$; $\forall y \in F$,

$$\begin{aligned} \langle u(x); y \rangle &= \langle u(x); u(y') \rangle \quad (u|_F \text{ liéd}) \\ &= \langle x; y' \rangle \quad (\text{isométrie}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On applique la propriété de récurrence à $u|_{F^\perp}$

On obtient B_0 une base où $u|_{F^\perp}$ a la forme $(*)$. On ajoute $\frac{x}{\|x\|}$ à B_0 pour une base où u a la forme $(*)$.

→ cas 2: Si u n'admet aucune valeur propre réelle, alors on considère $v = u + u^*$ symétrique donc admet une valeur propre réelle λ associée à x .

On a $(u + u^*)(x) = \lambda x$ donc $u^2(x) + x = \lambda u(x)$

Ainsi $u^2(x) = \lambda u(x) - x \quad (**)$

Par ailleurs, $(x; u(x))$ est liée car u n'a pas de valeur propre. D'après $(**)$,

$F = \text{Vect}(x; u(x))$ est stable par u .

Soit $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base orthonormale B_0 .

u_F est une isométrie donc $NU^* = I_2 = U^*N$
 i.e. $\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow a^2+c^2 = a^2+b^2 = 1$ et $ab+cd = 0$
 $\Rightarrow c = \pm b$ mais $b \neq c$ car sinon N serait symétrique et on aurait une valeur propre.

Donc $c = -b \neq 0$. Donc $ab - bd = 0 \Leftrightarrow a = d$
 Finalement $a^2+b^2 = 1$ donc $\exists \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tel que
 $a = \cos \theta$; $b = \sin \theta$. D'où $N = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Comme F est stable par u , $F^\perp$ aussi donc par hypothèse de récurrence, on a une base orthonormée B_1 de $F^\perp$ telle que $u|_{F^\perp}$ est de forme (*). Finalement en adjoignant B_1 à B_0 pour former B ; $[u]_B$ est de forme (*).

Th 2: Soit E hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ unitaire
 Alors u se diagonalise dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont de module 1.

Preuve: $n=1$: ok
 $n-1 \Rightarrow n$: $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc
 $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre avec x un vecteur propre. $\|\lambda x\| = \|x\|$ donc $|\lambda| = 1$.
 $F = \text{Vect}(x)$ stabilisé par u donc $F^\perp$ aussi.
 Donc on applique la propriété où $u|_{F^\perp}$ pour une base B_0 , à laquelle on adjoint le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ pour que u soit diagonalisée.