

# Automorphismes diagonalisables, décomposant.

101: opérant sur  
106: GL  
123: Corps Fini  
130: combinatoire

RON p203 (H2 G2)  
p66

Soit  $E$  un  $F_q$ -ev de dim  $n \geq 1$ ,  $q = p^{(k)}$   
Soit  $DL(E)$  l'ens. des automorphismes diag.  
 $F_q^* = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}\}$

L1  $DL(E) = \{u \in GL(E) \mid u^{q-1} = \text{id}\}$

L2  $\forall u \in DL(E)$ ,  $E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} \text{Ker}(u - \lambda_k \text{id})$

L3  $\varphi: DL(E) \rightarrow \tilde{F}$ ,  $u \mapsto (\text{Ker}(u - \lambda_k \text{id}))_{1 \leq k \leq q-1}$   
et bijective avec  $\tilde{F}$  l'ensemble des  $(E_k)_{1 \leq k \leq q-1}$

tg  $E = \bigoplus E_k$ .

L4  $(m_k) \in \mathbb{N}^{q-1}$  fixé tg  $\sum_{k=1}^{q-1} m_k = n$   
 $\psi: GL(E) \times \tilde{F}_{m_k} \rightarrow \tilde{F}_{m_k}$ ,  $\tilde{F}_{m_k} = \{(E_k) \in \tilde{F} \mid \dim E_k = m_k\}$   
 $(u; (E_1, \dots, E_{q-1})) \mapsto (u(E_1), \dots, u(E_{q-1}))$  est  
une action transitive.

LS: Avec  $\text{Stab}(E_1, \dots, E_k) = \{u \in GL(E) \mid u(E_k) = E_k\}$   
 $|\text{Stab}(E_k)| = \prod_{k=1}^{q-1} |GL(E_k)|$  et  $|\tilde{F}| = \frac{|GL(E)|}{\prod_{k=1}^{q-1} |GL(E_k)|}$

Th:  $|DL(E)| = \sum_{m_1, \dots, m_{q-1}: n} \frac{|GL(E)|}{|GL(E_1)| \dots |GL(E_{q-1})|}$

L1 Si  $u \in GL(E)$  diagonalisable ds  
son polynôme minimal  $\mu_u$  est scindé à  
racines simples, soit  $\mu_u(X) = \prod_{\lambda \in \text{Spl}(\mu_u)} (X - \lambda)$

Puisque  $\mu_u \mid X^{q-1} - 1 = \prod_{\lambda \in F_q^*} (X - \lambda)$ ,  $u^{q-1} = \text{id}$   
Réciproquement, sq  $u \in GL(E)$  tg  $u^{q-1} = \text{id}$   
 $X^{q-1} - 1$  est scindé à racines simples ds  
 $F_q[X]$  (d'après Lagrange) et annule  $u$  donc  
 $\mu_u$  aussi donc  $u$  est diagonalisable.

L2  $\forall u \in DL(E)$ , annulé par  $P(X) = \prod_{k=1}^{q-1} (X - \lambda_k)$   
On conclut avec le lemme de Cayley-Hamilton.

L3 L2 donne que  $\text{Im}(\varphi) \subset \tilde{F}$ .

$\rightarrow$  Soient  $(u, v) \in DL(E)$  tg  $\varphi(u) = \varphi(v)$   
 $\forall k$ ,  $\text{Ker}(u - \lambda_k \text{id}) = \text{Ker}(v - \lambda_k \text{id})$   
 $\forall x \in \text{Ker}(u - \lambda_k \text{id})$ ,  $u(x) = v(x) = \lambda_k x$   
Donc  $u = v$ . Donc  $\varphi$  est injective.

$\rightarrow$  Soit  $(E_k) \in \tilde{F}$  et  $u$  tg  $\forall k$ ,  $u|_{E_k} = \lambda_k \text{id}_{E_k}$   
est donc  $DL(E)$  et  $\varphi(u) = (E_k)$  donc surjective

LL  $u \in \text{GL}(E)$  et  $E = \bigoplus E_k$  tq  $\dim(E_k) = n_k$   
 $E = u(E)$  (automorphisme).

$$u(E) = \sum_{k=1}^{q-1} u(E_k) \text{ avec } \dim u(E_k) = n_k$$

Donc  $E = \bigoplus u(E_k)$  donc  $(u(E_k)) \in \mathcal{F}_{n_k}$

$\rightarrow$   $\varphi$  transitive si  $\forall (E_k) \in \mathcal{F}_{n_k}, \forall (F_k) \in \mathcal{F}_{n_k},$

$$\exists u \in \text{GL}(E) \text{ tq } u(E_k) = F_k$$

Soit deux bases  $B = \cup B_k, B_k$  base de  $E_k$

$B' = \cup B'_k, B'_k$  base de  $F_k$

$\dim(E_k) = \dim(F_k) = n_k$  on peut définir  $u \in \text{GL}(E)$

tq  $u(B) = B'$ . On a alors  $u(E_k) = F_k$

LS  $\forall u \in \text{Stab}(E_1, \dots, E_{q-1}), u(E_k) = E_k$

Donc  $u|_{E_k} \in \text{GL}(E_k)$ . Réciproquement si  $u|_{E_k} \in \text{GL}(E_k)$   
on a alors  $u(E_k) = E_k$  (automorphisme).

Donc  $\text{Stab}(E_1, \dots, E_{q-1}) = \{ u \in \text{GL}(E) \mid u|_{E_k} \in \text{GL}(E_k) \}$

$$\text{Donc } |\text{Stab}((E_k)_k)| = \prod_{k=1}^{q-1} |\text{GL}(E_k)|$$

Formule des donnes  $\Rightarrow |\mathcal{F}_{n_k}| = \frac{|\text{GL}(E)|}{|\text{Stab}(E_k)|}$   
 $= \frac{|\text{GL}(E)|}{\prod_{k=1}^{q-1} |\text{GL}(E_k)|}$

Th  $(\mathcal{F}_{n_k})$  partition de  $\mathcal{F}$

$$|\mathcal{DL}(E)| = |\mathcal{F}| = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_{q-1} \\ = n}} |\mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_{q-1})}|$$

$$|\mathcal{DL}(E)| = \sum_{n_1 + \dots + n_{q-1} = n} \frac{|\text{GL}(E)|}{\prod_{k=1}^{q-1} |\text{GL}(E_k)|}$$

Exemple:  $\mathbb{F}_2^2$  :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\text{GL}(E)| = 6$$

$$|\text{GL}(E_1)| = 6$$

$$\frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow |\mathcal{DL}(\mathbb{F}_2^2)| = 1$$

$$|\mathcal{D}(\mathbb{F}_2^2)| = 6 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = 8$$