Théorème : Tout endomorphisme normal peut être représenté dans ~~une~~ base orthonormé par $\Delta = \begin{pmatrix} D_p & & 0 \\ & R_1 & \\ 0 & & \ddots R_p \end{pmatrix}$ où D_p est diagonale et $R_i = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; $b \neq 0$

Preuve : Par récurrence sur la dimension.

$n=1$: Toute base orthonormé convient.

H : Sq $\forall \underset{\dim E}{k} \leq n \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie.

Sq $\dim E = n+1$. Alors u admet un ss espace stable F de dim 1 ou 2

cas 1 : Si dim 1 dans une b.o.n adaptée à $F \oplus F^\perp$, $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix}$ où $A^T A = A A^T$

Par hypothèse de récurrence on a alors une b.o.n de $F^\perp$ tq $\text{Mat}(u_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} D_p & & \\ & A_1 & \\ & & \ddots R_p \end{pmatrix}$

Donc dans une b.o.n adaptée à $F \oplus F^\perp$ on a bien $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & D_p & & \\ & & R_1 & \\ & & & \ddots R_p \end{pmatrix}$

cas 2 : Si $\dim F = 2$ (et jamais 1).

Alors dans une b.o.n adaptée à $F \oplus F^\perp$

$\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ $\underset{E^\perp}{\overset{u_2}{}} A_2$ est normal sans vecteur propre donc dans une b.o.n on a $\text{Mat}(u_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_r \end{pmatrix}$

On prend $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sans vp réelle.

$A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = A_1 A_1^T$

Donc $b^2 = c^2$ donc $b = \pm c \neq 0$ car sinon diago.

Si $b = c$ alors $\chi_{A_1}(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$

Discriminant : $\delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2 + b^2 > 0$ $\frac{?}{?}$

Donc $b = -c$ donc $A_1 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$

Enfin $ab - bd = -ab + bd$ donc $a = d$ (car $b \neq 0$)

Donc $A_1 = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$. Dans une b.o.n adaptée on a donc bien $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} R_0 & & \\ & \ddots & \\ & & R_r \end{pmatrix}$.

Réduction des endo normaux (E ~~ev~~ $\mathbb{R}$ev)

<u>Lemme:</u> Si u stabilise un sev F et u normal alors u stabilise $F^\perp$ et u_F et $u_{F^\perp}$ sont normaux

---

<u>Preuve:</u> <u>cas 1:</u> $F = \{0\}$ ou E ; $F^\perp = E$ ou $\{0\}$ immédiat.

<u>cas 2:</u> $n = \dim E \geq 2$ et $0 < \dim F < n$

Sur un base ~~B~~ orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{Mat}(u) = A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$

et $A^T = \mathrm{Mat}(u^*)$

$$AA^T = \begin{pmatrix} A_1A_1^T + A_2A_2^T & A_2A_3^T \\ A_3A_2^T & A_3A_3^T \end{pmatrix}$$

sont égales

$$A^TA = \begin{pmatrix} A_1^TA_1 & A_1^TA_2 \\ A_2^TA_1 & A_2^TA_2 + A_3^TA_3 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{tr}(A_2A_2^T) = 0$ donc $A_2 = 0$

car $\varphi : (A;B) \to \mathrm{tr}(AB^T)$ est un produit scalaire.

Ainsi $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$; $A_1^TA_1 = A_1A_1^T$ et $A_3^TA_3 = A_3A_3^T$

Donc u stabilise $F^\perp$ et u_F et $u_{F^\perp}$ sont normaux.

<u>Lemme:</u> Tout endomorphisme normal admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2

<u>Preuve:</u> <u>cas 1:</u> u admet un vp $x \neq 0$

Alors $\mathrm{Vect}(\{x\})$ convient.

<u>cas 2:</u> u n'admet aucun vecteur propre.

Alors μ_u n'a pas de facteur de degré 1.

Alors il n'a que des facteurs de degré 2.

On a donc $\mu_u(X) = (X^2 + bX + c)Q(X)$

avec $b^2 - 4c < 0$ et $Q(u) \neq 0$.

Or $0 = \mu_u(u) = (u^2 + bu + c\,id) \circ Q(u)$

donc $\mathrm{Im}\, Q(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + bu + c\,id) \neq \{0\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + bu + c\,id) \setminus \{0\}$ alors

$(x ; u(x))$ est libre et $u^2(x) = -bu(x) - cx$

Donc $\mathrm{Vect}((x ; u(x)))$ est stable par u et de dim 2.

. **Bonus :** Si u est orthogonal, $uu^* = u^*u = id$
les seules vp possible sont 1 et -1 donc $D_p = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$
et R_i doivent être de $\det R_i = \pm 1$ donc $a^2 + b^2 = 1$
On peut écrire $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta \end{pmatrix}$

. Si u est symétrique, $u = u^*$ donc $b = -b \neq 0$
impossible donc $\Delta = D_n$: th. spectral.
. Si u est anti-symétrique : $D_p = O_p$

Cas complexe : C'est la même preuve sauf qu'on remplace A^T par A^* et qu'il y a toujours un sev-stable de dimension 1.
