

L2: Soit u normal et F stable par E .
Soit une b.o.n B de $F \oplus F^\perp$

$$\Pi = \text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ mais } u \text{ normal}$$

$$\text{donc } \Pi \Pi^T = \Pi^T \Pi \text{ donc } \begin{pmatrix} AA^T + BB^T & * \\ * & CC^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & * \\ * & B^T B + C^T C \end{pmatrix}$$

Donc $AA^T + BB^T - A^T A = 0$, en particulier
tr $BB^T = 0$ donc $B = 0$ (produit scalaire)

$$\text{Donc } \Pi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{et } CC^T = C^T C \\ \text{donc } u_F^\perp \text{ normal} \end{pmatrix}$$

L3: Par récurrence sur $\dim E = n$

1) $n=1$ ou 2 : immédiat.

2) Soit vrai $\forall$ endomorphisme normal
de $\dim E \leq n$. Soit $\dim E = n+1$, u normal.

D'après L1, on a F de $\dim 1$ ou 2 où
 u_F normal et stable.

par L2, $F^\perp$ stable par u et $u_{F^\perp}$ normal.
Donc $\exists P_2, \dots, P_r$ ser de E tq $F^\perp = \bigoplus_{i=2}^r P_i$

Avec $F = P_1$ on a bien $F = \bigoplus_{i=1}^r P_i$

L4 $n=2 \rightarrow$ sq $\lambda \in \text{Sp}(u) \cap \mathbb{R}$ et $x \in E(u) \setminus \{0\}$
 $\|x\|=1$

L2 $\Rightarrow (\mathbb{R}x)^\perp$ stable par u mais
 $\dim (\mathbb{R}x)^\perp = 1$ donc on a une homothétie
induite de rapport μ : Soit $y \in (\mathbb{R}x)^\perp$ tq $\|y\|=1$
Alors $\text{Mat}_{(x,y)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ sq $\text{Sp}(u) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \text{Mat}(u)$
 $\& A^T A = A A^T$ donc $\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$ Bon

Donc $c^2 = b^2$ donc $c = \pm b$.

Si $b=c$, $A \in \text{S}_2(\mathbb{R})$ donc $\text{Sp}(u) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$

Donc $b \neq c$ donc $a = d$
Donc $ab - bd = -ab + bd$

Donc $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $b \neq 0$

Th: Conséquence immédiate de L3 et L4.

Bonus: isométries $u^* = u^{-1}$ donc normal.

(+) réduction par Di et R!

Réduction des end. normaux
RON p743

106: ligne linéaire	148: dim
150: polynôme	151: stable
152: diagon.	158: remarquable
157: symétriques	

Soit E euclidien de dim n . $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$. $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u u^* = u^* u$ ou si $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$

L1: $\exists F$ ser de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, de dim 1 ou 2.

L2: So u est normal. Si F ser stable par u , $F^\perp$ aussi.

L3: $\exists P_1, \dots, P_r$ ser de E , stables par u tq de dim 1 ou 2
 $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} P_i$

Th1: Si $n = \dim E = 2$ alors soit u admet une v.p réelle et diagonalisable, soit $u \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$

Th: $\exists B$ bon de E tq $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} D_P & 0 \\ 0 & R_1 \dots R_n \end{pmatrix}$
Où D_P est diagonale et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ $b_i \neq 0$

Preuve L1: Si u admet une v.p réelle λ
Alors $\forall x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$, $\mathbb{R}x$ est stable par u .

$\rightarrow$ Sinon, $\deg \pi_u(X) \geq 2$ (car sinon on aurait une racine réelle).

Dans $\mathbb{R}[X]$, la décomposition se fait en polynômes de degré 2 tq $\Delta < 0$.

Soit en tel $X^2 + bX + c$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$
tq $\pi_u(X) = (X^2 + bX + c) Q(X)$.

Par minimalité, $Q(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

Et $(u^2 + bu + c) \circ Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $u^2 + bu + c$ n'est pas injectif.

Soit $x \in \text{Ker}(u^2 + bu + c) \setminus \{0_E\}$

Et $P = \text{Vect}(x, u(x))$

$\forall \alpha x + \beta u(x) \in P, u(\alpha x + \beta u(x)) = \alpha u(x) + \beta u^2(x)$

$= \alpha u(x) - b\beta u(x) - c\beta x \in P$

$\dim P = 2$ car sinon x est vecteur propre.