Déterminant circulant et application

<u>Enoncé :</u>

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ Posons $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Alors $det(A) = \prod_{j=1}^{n} P(\omega^j)$ avec $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

2) Soit P un polygone du plan complexe à n côtés. Notons $(z_1, ..z_n) \in \mathbb{C}^n$ les affixes des sommets de P. On définit alors pas récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arrêtes de P_k. Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.

1) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ On a alors $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$

Diagonalisons J.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus 0_n$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$JX = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \lambda^n x_i$
$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{U}_n$
Donc $Sp(J) \subset \mathbb{U}_n$.

Réciproquement, pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, en posant $e_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$ non nul on a $Je_k = \omega^k e_k$

Ainsi, e_k est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k et donc $Sp(J) = \mathbb{U}_n$.

Ainsi, J possède n valeurs propres distinctes et donc J est diagonalisable et il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J = PDP^{-1}$ (avec $D = diag 1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}$)

On a donc $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = P(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)P^{-1}$

Donc, $det(A) = det(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k) = \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ik} = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$

2) Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés $z_1, \cdots, z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a+b=1$.

On définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = B_{a,b}(P)$ le polygone $(z'_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ avec $z'_i = az_i + bz_{i+1}$.

- (Relation de récurrence)

Pour $k \in \mathbb{N}$, on représente le polygone P_k par le vecteur $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix}$

On a alors la relation $\forall k \in \mathbb{N}, Z_{k+1} = \begin{pmatrix} z_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ z_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1^{(k)} + bz_2^{(k)} \\ \vdots \\ az_n^{(k)} + bz_1^{(k)} \end{pmatrix}$

On a alors par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = C_{a,b}^k Z_0$ avec $C_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$

- (Convergence de $(C_{a,b}^k)_k$)

$$\chi_{C_{a,b}} = \begin{vmatrix} X-a & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & -b \\ -b & 0 & \cdots & 0 & X-a \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}(X - \underbrace{(a+b\omega^j)}_{=\lambda_j})$$ par le

point précédent.

La matrice $C_{a,b}$ est donc diagonalisable (car $\chi_{C_{a,b}}$ est scindé à racines simples) et il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C_{a,b} = PDP^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$. Or, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$|\lambda_j|^2 = |a + b\omega^j|^2 = (a + bcos(\frac{2j\pi}{n}))^2 + b^2 sin^2(\frac{2j\pi}{n}) = a^2 + b^2 + 2abcos(\frac{2j\pi}{n}) = (a+b)^2 - 2ab + 2abcos(\frac{2j\pi}{n}) = 1 - 2\underbrace{ab}_{>0}\underbrace{(1 - cos(\frac{2j\pi}{n}))}_{>0} < 1.$

On a donc $\lambda_0 = a + b = 1$ et pour tout $j \in [\![1, n-1]\!], |\lambda_j|^k \to 0$. La suite $(D^k)_k$ converge donc vers la matrice $D^\infty = diag(1, 0, ..., 0)$ et par continuité du produit, on a $C_{a,b}^k \to PD^\infty P^{-1}$.

Ainsi, la suite $(Z_k)_k$ converge vers $Z \in \mathbb{C}^n$ et on a également $Z = C_{a,b}Z$, donc $Z \in Ker(C_{a,b} - I_n) = E_1(C_{a,b})$

Or $C_{a,b}$ possède n valeurs propres distinctes et donc $E_1(C_{a,b})$ est de dimension 1 et puisque $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(C_{a,b})$ il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Z = \alpha e = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$

Finalement, la suite $(P_k)_k$ converge vers le point d'affixe α.

• (Convergence vers l'isobarycentre)

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note G_k l'isobarycentre de P_k. On a alors (modulo n) :

$G_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n az_i^{(k)} + bz_i^{(k)} = (a+b)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^{(k)} = G_k$

Donc la suite $(G_k)_k$ est constante et donc converge vers $G_0 \in \mathbb{C}$. Enfin, par continuité du passage à l'isobarycentre, on a $(G_k)_k$ qui converge vers α ($P_k \to \alpha$ donc par passage à l'isobarycentre $G_k \to \alpha$).

Finalement, la suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.