Inégalités de Hadamard et de Minkowski

Enoncé :

1) a) (Inégalité d'Hadamard) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique positive. Alors $det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

b) Soit E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme auto-adjoint de E défini positif. On désigne par $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de f et $\mathcal{A}$ l'ensemble des bases orthonormales de E. On a $\prod_{i=1}^n \lambda_i = inf_{(e_1,\cdots,e_n) \in \mathcal{A}} \prod_{i=1}^n \langle f(e_i), e_i \rangle$.

2) Soit A une matrice symétrique définie positive et $\alpha > 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de déterminant supérieur ou égal à α. Alors $inf_{S \in \mathcal{S}} Tr(AS) = n(\alpha det(A))^{1/n}$.

3) (Inégalité de Minkowski) Soit A, B deux matrices symétriques définies positives. Alors $(det(A))^{1/n} + (det(B))^{1/n} \leq (det(A+B))^{1/n}$.

1) a) A étant symétrique, alors par le théorème spectral, $\exists B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ orthogonale et $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ à coefficients diagonaux strictement posiifs tels que $A = BD^tO$.

On en déduit, pour tout $i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} = \sum_{j=1}^n b_{i,j}^2 \lambda_j$.

Comme $\sum_{j=1}^n b_{i,j}^2 = 1$, puisque B est orthogonale, on obtient par concavité de le fonction ln : $ln(a_{i,i}) \geq \sum_{j=1}^n b_{i,j}^2 ln(\lambda_j)$, puis

$ln(\prod_{i=1}^n a_{i,i}) \geq \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j}^2 ln(\lambda_j) = \sum_{j=1}^n ln(\lambda_j)(\sum_{i=1}^n b_{i,j}^2) = \sum_{j=1}^n ln(\lambda_j)$ car B est orthogonale.

On a donc $ln(\prod_{i=1}^n a_{i,i}) \geq ln(det(A))$ d'où le résultat.

b) Les valeurs propres de f sont réelles positives et f est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ chaque ϵ_i étant vecteur propre relatif à la valeur propre λ_i (f est auto-adjoint).

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale quelconque de E et $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans cette base.

On a $\prod_{i=1}^n \langle f(e_i), e_i \rangle = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale et d'après le point précédent, $\prod_{i=1}^n \lambda_i = det(f) = det(A) \leq \prod_{i=1}^n \langle f(e_i), e_i \rangle$.

On en déduit $\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq inf_{(e_1,\cdots,e_n) \in \mathcal{A}} \prod_{i=1}^n \langle f(e_i), e_i \rangle$ et en considérant la base $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{A}$, on conclut sur l'égalité.

2) Par le théorème spectral, $\exists D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale à termes diagonaux strictements positifs, et P orthogonale telles que $A = PD^tP$.

On en déduit que si $S \in \mathcal{S}, TR(AS) = TR(PD^tPS) = TR(D^tPSP)$.

La matrice $S' =^t PSP = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$est symétrique définie positive, $det(S') = det(S)$ et $Tr(AS) = Tr(DS') = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i}$.

Par concavité du logarithme, on obtient $ln(\frac{1}{n}Tr(AS)) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(\lambda_i s_{i,i}) \geq \frac{1}{n}ln(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i}) \geq \frac{1}{n}ln(det(A\prod_{i=1}^{n}s_{i,i}))$.

Or, d'après le point précédent, on a que si S' est symétrique définie positive, on a $\prod_{i=1}^{n}s_{i,i} \geq det(S')$.

On en déduit, $ln(\frac{1}{n}Tr(AS)) \geq \frac{1}{n}ln(det(A)det(S')) \geq \frac{1}{n}ln(\alpha det(A))$ et donc $\frac{1}{n}Tr(AS) \geq (\alpha det(A))^{1/n}$.

On obtient finalement $Tr(AS) \geq n(\alpha det(A))^{1/n}$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Montrons qu'on peut choisir S pour qu'il y ait égalité, ce qui terminera la démonstration.

On choisit S telle que S' soit diagonale avec $s_{i,i} = \frac{\lambda}{\lambda_i}(\lambda > 0)$.

On a alors $Tr(AS) = Tr(DS') = n\lambda$. On choisit λ pour que $det(S) = det(S') = \alpha$.

Il faut $\frac{\lambda^n}{det(A)} = \alpha$ soit $\lambda = (\alpha det(A))^{1/n}$. La matrice $S =^t PS'P$ appartient alors à $\mathcal{S}$ et $Tr(AS) = n(\alpha det(A))^{1/n}$

3) On applique la résultat précédent pour $\alpha = 1$ et $S \in \mathcal{S}$, on a $(det(A))^{1/n} + (det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n}(Tr(AS) + Tr(BS)) = \frac{1}{n}Tr((A+B)S)$.

Il suffit de passer à la borne supérieure et on obtient $(det(A))^{1/n} + (det(B))^{1/n} \leq (det(A+B))^{1/n}$.