214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustration en analyse et géométrie

1 Calcul différentiel

1.1 Difféomorphismes

Définition 1. *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbf{R}^n$. On dit qu'une application $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un* difféomorphisme *de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ si elle est bijective de bijection réciproque différentiable. Si de plus f et son inverse sont de classe $\mathcal{C}^1$, c'est un $\mathcal{C}^1$-*difféomorphisme.

Proposition 2. *Un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

Exemple 3. *L'application tangente est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$.*

Exemple 4. *L'application $z \mapsto z^2$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\{\Im(z) > 0\}$ sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_+$.*

Proposition 5. *Un difféomorphisme est un homéomorphisme.*

Exemple 6. *Un homéomorphisme n'est pas nécessairement un difféomorphisme comme le montre $t \mapsto t^3$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbf{R}$ mais dont la réciproque n'est pas dérivable en 0.*

1.2 Inversion locale

Théorème 7. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $\phi\colon X \to X$ une application contractante. Il existe un unique point fixe x vérifiant $\phi(x) = x$.*

Développement 1

Théorème 8. *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{R}^n$ et a dans $\mathcal{U}$ tel que $d_a f$ soit un isomorphisme. Alors il existe $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de a et $\mathcal{W}$ un voisinage ouvert de $f(a)$ tels que $f_{|\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*
De plus, la différentielle de f^{-1} au point $y = f(x)$ de $\mathcal{W}$ est donnée par

$$D\left(f^{-1}\right)(y) = (Df(x))^{-1}.$$

Exemple 9. *Définissons sur $\mathbf{R}^2$ l'application $f\colon (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. L'application f est différentiable et $Df(r, \theta) = r$. En tout point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ non nul, f est inversible d'inverse local $g\colon (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right)$. Cela correspond au passage d'un repère cartésien vers un repère polaire.*

Lemme 10. *Soit $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f(0) = 0$. Il existe $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que pour tout x,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x).$$

Lemme 11. *Si de plus $d_0 f = 0$, il existe $(h_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que*

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x).$$

Développement 2

Théorème 12 (Lemme de Morse)**.** *Soit $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f(0) = 0$ et $d_0 f = 0$ telle que $d_0^2 f$ soit inversible. Alors il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tel que sur un voisinage de 0,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \phi_i(x)^2.$$

1.3 Fonctions implicites

Définition 13. *Écrivons $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_r}$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. La k-ème* différentielle partielle *de f en un point a de $\mathcal{U}$ est la différentielle en a_{n_k} de l'application $f \circ \pi_k$ où π_k est définie de $\mathbf{R}^{n_k}$ dans $\mathbf{R}^n$ par $\pi_k\colon x_k \mapsto (a_{n_1}, \ldots, a_{n_{k-1}}, x_k, a_{n_{k+1}}, \ldots, a_{n_r})$. On note alors*

$$D_k f(a) = D(f \circ \pi_k)(a_k).$$

Théorème 14. *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbf{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{R}^{m+n}$. Supposons qu'en un point (a, b) de $\mathcal{U}$ l'on ait $f(a, b) = 0$ et que $D_2 f(a, b)$ soit un isomorphisme. Alors il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de a et $\mathcal{W}$ un voisinage de b et une application unique $\phi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ telle que pour tous (x, y) de $\mathbf{R}^{m+n}$, ϕ jouit de la propriété*

$$(x, y) \in \mathcal{V} \text{ et } f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{W} \text{ et } f(x, \phi(x)) = 0. \tag{1}$$

De plus, la différentielle de ϕ vérifie pour tout x de $\mathcal{V}$

$$D\phi(x) = -\left(D_2 f(x, \phi(x))\right)^{-1} \circ D_1 f(x, \phi(x)). \tag{2}$$

Remarque 15. *La conclusion du théorème peut aussi s'écrire*

$$f^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{V} = \{(x, \phi(x)) \mid x \in \mathcal{W}\}.$$

2 Variétés différentielles

2.1 Sous-variétés

Définition 16. *Une partie M de $\mathbf{R}^n$ est une* sous-variété *de dimension d et de classe $\mathcal{C}^k$ s'il existe F un sous-espace de dimension d et si tout point m de M admet un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ tel qu'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\phi\colon \mathcal{U} \to \phi(\mathcal{U})$ vérifiant*

$$\phi(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{U} \cap F.$$

Exemple 17. *Le cercle unité* $\mathbf{S}^1$ *est une sous-variété de dimension* 1 *de* $\mathbf{R}^2$ *en considérant* $\phi\colon (x,y) \mapsto \left(\arctan \frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2}-1\right)$.

Définition 18. *Une partie* M *de* $\mathbf{R}^n$ *est une sous-variété de dimension* d *et de classe* $\mathcal{C}^k$ *si tout point* m *de* M *admet un voisinage ouvert* $\mathcal{U}$ *tel qu'il existe des fonctions réelles* $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n-d}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* $\mathcal{U}$ *vérifiant :*

1. $$\mathcal{U} \cap M = \bigcap_{i=1}^{n-d} {f_i}^{-1}(\{0\}).$$
2. *La famille* $(Df_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n-d}$ *est libre quelque soit* x *dans* $\mathcal{U}$.

Exemple 19. *L'ensemble* $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y=0, z=0\right\}$ *est une sous-variété de dimension* 1.

Définition 20. *Une partie* M *de* $\mathbf{R}^n$ *est une sous-variété de dimension* d *et de classe* $\mathcal{C}^k$ *si tout point* m *de* M *admet un voisinage ouvert* $\mathcal{U}$ *tel qu'il existe une application* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}^{n-d}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *vérifiant :*

1. *La différentielle* $Df(x)$ *est surjective quelque soit* x *dans* $\mathcal{U}$.
2. *Pour un certain* y *de* $\mathbf{R}^{n-d}$ *l'on a* $M \cap \mathcal{U} = f^{-1}(\{y\})$.

Exemple 21. *Le groupe orthogonal* $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ *est une sous-variété de dimension* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 22. *Les définitions 16, 18 et 20 sont équivalentes.*

2.2 Espace tangent

Définition 23. *Un vecteur* v *de* $\mathbf{R}^n$ *est* tangent *en un point* m *à une variété* M *s'il existe un intervalle ouvert* I *contenant* 0 *et une application dérivable* $\gamma\colon I \to M^n$ *vérifiant* $\gamma(0) = m$ *et* $\gamma'(0) = v$. *L'ensemble des vecteurs tangents en* m *à* M *s'appelle* l'espace tangent *en* m *à* M *et est noté* T_mM.

Théorème 24. *L'espace tangent* T_mM *est un espace vectoriel de même dimension que* M.

Théorème 25. *Selon la définition 18, l'espace tangent est donnée par*

$$T_mM = \bigcap_{i=1}^{n-d} Df_i(m).$$

Théorème 26. *Selon la définition 20, l'espace tangent est donnée par*

$$T_mM = \ker Dg(m).$$

Définition 27. *Une application* $f\colon M \to N$ *entre variétés est de classe* $\mathcal{C}^k$ *en un point* m *de* M *s'il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{U}$ *de* m *et une application* $\hat{f}\colon \mathcal{U} \to \hat{f}(\mathcal{U})$ *telle que* $\hat{f}_{|\mathcal{U}\cap M} = f_{\mathcal{U}\cap M}$.

Proposition 28. *Avec les mêmes notations,* $D\hat{f}(m)$ *est une application de* T_mM *dans* $T_{f(m)}N$ *et sa restriction à* T_mM *ne dépend pas du choix de* $\hat{f}$.

Définition 29. *La restriction de* $D\hat{f}(m)$ *à* T_mM *est alors notée* $T_mf\colon T_mM \to T_{f(m)}N$, *c'est* l'application linéaire *tangente à* f *en* m.

Théorème 30. *Soit* $f\colon M \to N$ *et* $g\colon N \to P$ *deux applications de classe* $\mathcal{C}^k$ *entre variétés de classe* $\mathcal{C}^k$. *Alors* $g \circ f$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *et* $T_m(g\circ f) = T_{f(m)}g \circ T_mf$.

2.3 Extremas

Définition 31. *Une application* $f\colon A \to \mathbf{R}$ *définie sur une partie* A *de* $\mathbf{R}^n$ *admet un* minimum local *en* a *dans* A *s'il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{U}$ *de* a *tel que pour tout* x *de* $\mathcal{U} \cap A$, $f(a) \leqslant f(x)$.

Théorème 32. *Pour qu'une application différentiable* $f\colon A \to \mathbf{R}$ *présente un extremum local en un point* a *intérieur* A, *il faut que* $Df(a) = 0$.

Exemple 33. *La condition est nécessaire mais pas suffisante comme le montre* $t \mapsto t^3$ *qui n'admet pas d'extremum local mais est de dérivée nulle en* 0.

Définition 34. *Une application* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}$ *définie sur un ouvert* $\mathcal{U}$ *intersectant une variété* M *présente un extremum lié en un point* m *de* $\mathcal{U} \cap M$ *si* $f_{\mathcal{U}\cap M}$ *présente un extremum local en* m.

Théorème 35. *Avec les mêmes notations, pour que* f *présente un extremum lié en* m *sur la sous-variété* M, *il faut que la restriction de* $Df(m)$ *à l'espace tangent* T_mM *soit nulle.*

Lemme 36. *Soit* a *et* $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ *des formes linéaires sur* $\mathbf{R}^n$ *telles que la famille* $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ *soit libre et pour tout indice* i, $\ker b_i \subset \ker a$. *Alors* a *est combinaison linéaire des* b_i.

Théorème 37. *Soit* $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n-d}$ *des applications de classe* $\mathcal{C}^1$ *définies sur un ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$ *dont les différentielles sont linéairement indépendantes en chaque point de* $\mathcal{U}$. *Notons également*

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-d} {g_i}^{-1}(\{0\}).$$

Alors M *est une sous-variété de dimension* d *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et pour qu'une application différentiable* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}$ *présente un extremum lié en* m *de* $\mathcal{U}$ *sur* M, *il faut qu'il existe des constantes* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n-d}$ *telles que*

$$Df(m) = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i Dg_i(m). \tag{3}$$

Exemple 38. *Un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension finie admet une valeur propre réelle.*

Références

[Ave] André Avez. *Calcul différentiel*. Masson.

[Gou] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses.

[Rud] Walter Rudin. *Principes d'analyse mathématique*. Édisciences.