

3.5 Théorème de Fejér

Référence :

— Xavier Gourdon : *Les maths en tête - ANALYSE*, pages 306-307

Couplé avec les leçons : 209, 241, 246

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 2π -périodique.

Alors sa série de Fourier converge uniformément en moyenne de Césaro vers f ,

Autrement dit, en posant $S_n = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$ et $C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$ où $e_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{ikx} \in \mathbb{C}$ et $c_k(f)$, le k -ième coefficient de Fourier de f , alors la suite de fonctions $(C_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions :

$$\tilde{S}_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \end{cases} ; \quad \tilde{C}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tilde{S}_k$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{S}_n(x-t) dt \end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{C}_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} -f(x-u) \tilde{C}_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) \tilde{C}_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \tilde{C}_n(u) du \end{aligned}$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t) dt = 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 0$ et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^0 dt = 1$.

On aboutit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}_n(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}_k(t) dt \right) = 1$$

Soit $\varepsilon > 0$.

La fonction f est continue et 2π -périodique, elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$, on a alors un $\alpha \in]0; \pi[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \tilde{C}_n(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \tilde{C}_n(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} (f(x) - f(x-t)) \tilde{C}_n(t) dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x) - f(x-t)) \tilde{C}_n(t) dt \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M |\tilde{C}_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon |\tilde{C}_n(t)| dt \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} |\tilde{C}_n(t)| dt + \varepsilon \end{aligned}$$

On verra que $\tilde{C}_n(t)$ est un réel positif. On est ramenés à étudier le comportement de $(\tilde{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrons que pour tout $\beta \in]0, \pi[$, $(\tilde{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\beta, \beta]$:

Pour ce faire, on commence par calculer $\tilde{S}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*notons qu'il s'agit du noyau de Dirichlet*).

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{S}_n(x) = e^{-inx} \frac{e^{(2n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$\text{Or, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n e^{(k+\frac{1}{2})ix} = e^{-i\frac{x}{2}} \frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{\frac{(n+1)ix}{2}} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)$$

On en déduit, en prenant la partie imaginaire, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \sin\left((k + \frac{1}{2})x\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{C}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tilde{S}_k(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2$$

On trouve donc, pour $0 < \beta < \pi$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi], |x| > \beta, \quad |\tilde{C}_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Ce qui montre la convergence uniforme de $(\tilde{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\beta, \beta]$ pour tout $\beta \in]0, \pi[$.

En prenant $\beta = \alpha$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} \tilde{C}_n(t) dt \leq \varepsilon$$

.

On trouve donc, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq N$:

$$|f(x) - C_n(x)| \leq \frac{M}{\pi} \varepsilon + \varepsilon$$

D'où la convergence uniforme de $(C_n)_n$ vers f sur $\mathbb{R}$. □

Remarque :

On reconnaît le noyau de Dirichlet $\tilde{S}_n$ et le noyau de Fejér $\tilde{C}_n$.

On utilise ici les notations utilisées dans le Gourdon, mais traditionnellement on note plutôt le noyau de Dirichlet

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$

Et le noyau de Fejér

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$$

Il est également recommandé pour ce développement de connaître la définition de noyau, d'approximation de l'unité ainsi que quelques propriétés sur les deux noyaux utilisés ici (leur type de convergence etc).