2.3 Décomposition de Dunford

Référence :

— Xavier Gourdon : *Les maths en tête - ALGEBRE PROBABILITES*, pages 192 à 193

Couplé avec les leçons : 150, 151, 152, 155 (matriciel), 156

Théorème :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) tels que d diagonalisable, n nilpotent, $f = d + n$ et d et n commutent. De plus, d et n sont des polynômes en f.

Lemme :

Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f,
on note $F = \beta \displaystyle\prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles et pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $N_i = \ker\left(M_i^{\alpha_i}(f)\right)$.
Alors $\quad E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} N_i \quad$ et pour tout i, le projection sur N_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Preuve :

Preuve du lemme :
D'après le lemme des noyaux, on a $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} N_i$.

Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, on pose $Q_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$. Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i, on a pgcd$(Q_1, \cdots, Q_s)$= 1.
Par théorème de Bézout, il existe $U_1, \cdots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\quad U_1Q_1 + \cdots + U_sQ_s = 1 \quad$ de sorte que

$$Id_E = U_1(f) \circ Q_1(f) + \cdots + U_s(f) \circ Q_s(f)$$

Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, on pose $P_i = U_iQ_i$ et $p_i = P_i(f)$. On a alors : $\quad Id_E = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} p_i \quad (*)$

Par ailleurs, pour tous $j \neq i$, F divise Q_iQ_j donc (par commutativité des polynômes en f) :

$$p_i \circ p_j = (U_i \circ Q_i(f)) \circ (Q_j \circ U_j(f)) = U_iU_j(f) \circ Q_iQ_j(f) = 0 \quad (**)$$

On déduit de $(*)$ que pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $p_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j \quad$ et donc d'après $(**)$ on a $p_i = p_i^2$. Les p_i sont donc des projecteurs.

Soit $i \in [\![1, s]\!]$, montrons que Im(p_i)= N_i :
Soit $y \in \text{Im}(p_i)$, on a un $x \in E$ tel que $y = p_i(x)$ et

$$\begin{aligned} M_i^{\alpha_i}(f)(y) &= M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ U_iQ_i(f)(x) \\ &= U_i(f) \circ \left(\frac{1}{\beta}F(f)\right)(x) = 0 \quad \text{car } F = \beta M_i^{\alpha_i} Q_i \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathrm{Im}(p_i) \subset \ker M_i^{\alpha_i}(f) = N_i$.

Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in N_i$. D'après $(*)$, on a $x = \sum_{i=1}^{s} p_i(x)$

Or pour $j \neq i$, on a $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i}$ divise Q_j donc $x = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$.

Finalement, $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$.

Il ne reste plus qu'à montrer que pout tout i, $\ker(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$:

Soient $i \neq j$ et $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ car $M_j^{\alpha_j}$ divise Q_i *(même argument que précédemment)* donc $N_j \subset \ker(p_i)$.

On en déduit que $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \ker(p_i)$

Soit maintenant $x \in \ker(p_i)$, d'après $(*)$ on a $x = \sum_{j\neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j\neq i} N_j$ car $\mathrm{Im}(p_j) = N_j$ par l'étape précédente.

Preuve du théorème :

<u>Existence</u> : Appliquons le lemme précédent au polynôme $F = \chi_f = (-1)^m \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, notons $N_i = \ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$, les sous-espaces caractéristiques, et $M_i = (X - \lambda_i)$.

On a alors $p_i = P_i(f)$ la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$. Posons $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ qui est diagonalisable car $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$ (les polynômes en f commutent) et p_i est diagonalisable, pour tous $i, j \in [\![1, s]\!]$. Ainsi les p_i sont codiagonalisables.

Posons $n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i id_E)\, p_i$. On a alors pour tout $q \in \mathbb{N}$: $n^q = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i\, id_E)^q\, p_i$

En particulier, pour $\alpha = \max_{i \in [\![1,s]\!]} (\alpha_i)$, on a pour tout i,

$$(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha}\, p_i = \left[(X - \lambda_i)^{\alpha}\, P_i\right](f) = 0$$

car χ_f divise $(X - \lambda_i)^{\alpha} P_i$. Donoc $n^{\alpha} = 0$ et n est nilpotent.

<u>Unicité</u> : Supposons qu'il existe un autre couple d'endomorphismes (d', n') vérifiant que d' est diagonalisable, n' nilpotent, $d' \circ n' = n' \circ d'$ et $f = d' + n' = d + n$. On a d' qui commute avec n' et avec lui-même donc qui commute avec f donc avec d et n qui sont des polynômes en f (idem pour n'). Ainsi d et d' sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent donc sont codiagonalisables, ce qui entraîne que $d - d'$ est diagonalisable.

Comme n et n' sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent, on a $n' - n$ qui est nilpotent *(en effet, si n est d'indice k_1 et n' d'indice k_2 alors $(n' - n)^{k_1 + k_2 + 1} = 0$)* . Or $n' - n = d - d'$ qui est donc diagonalisable et nilpotent, donc d'unique valeur propre 0 c'est donc l'endomorphisme nul d'où $d = d'$ et $n = n'$.

□

Application à l'exponentielle de matrices :

Soit $A \in Mn(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Preuve :

Sens direct : Si $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors par propriété de l'exponentielle matricielle, on a $e^A = Pe^DP^{-1}$.

Sens indirect : Supposons que e^A est diagonalisable. Comme χ_A est scindé, on utilise la décomposition de Dunford de A : $A = D + N$. On veut montrer que $N = 0$.
Puisque D et N commutent, on a :

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)\\ &= \exp(D)\ (I_n + \exp(N) - I_n) = \exp(D) + \underbrace{\exp(D)\ (\exp(N) - I_n)}_{:=N'}\end{aligned}$$

Montrons que la décomposition de Dunford de e^A est $e^A = e^D + N'$.
D'une part, comme D est diagonalisable, par le point précédent, e^D est diagonalisable.
D'autre part, e^D commute avec D qui lui-même commute avec N. Donc e^D commute avec N donc avec N' aussi.
Il nous reste à montrer que N' est nilpotente : notons p l'indice de nilpotence de N, qu'on suppose par l'absurde strictement supérieur à 1, on a

$$\begin{aligned}N' &= \exp(D)\ (\exp(N) - I_n) = \exp(D)\ \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{N^i}{i!} - I_n\right)\\ &= \exp(D)\ \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{N^i}{i!}\right) = \exp(D)\ N \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{p-2} \frac{N^i}{i!}\right)}_{:=P(N)}\end{aligned}$$

Par suite, comme e^D, N et $P(N)$ commutent, on a :

$$(N')^p = [\exp(D)\ N\ P(N)]^p = \exp(D)^p\ N^p\ P(N)^p = 0 \quad \text{car } N^p = 0$$

Par unicité, on a bien que c'est la décomposition de Dunford de e^A.

Or, puisque e^A est supposée diagonalisable, on a que la partie nilpotente de sa décomposition de Dunford est nulle. Ainsi

$$\begin{aligned}e^D(e^N - I_n) = 0 &\Leftrightarrow e^N - I_n = 0 \quad \text{car } e^D \in GL_n(\mathbb{K})\\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \frac{N^i}{i!} = 0\end{aligned}$$

Donc $Q = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{X^i}{i!}$ est un polynôme annulateur de N or X^p est le polynôme minimal de N qui est de degré strictement supérieur à celui de Q. Cette contraction implique que $N = 0$.

□

Remarque : Pour la leçon 155 traitant de l'exponentielle matricielle, on admet le lemme pour développer l'application. Dans les autres leçons on montre le lemme et ne met que dans le plan l'application.