Etude des suites de variables aléatoires suivant une loi de Poisson

Nico

Prérequis : Lemmes de Borel Cantelli.

Notations :

1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.
2. $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_n. Ie, $\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n^k}{k!}$.

Le dév se décompose en 2 exos :

Soit $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. $\mathbb{P}(X_n \neq 1 \text{ pour une infinité de } n) = 1$.
2. Soit $p = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - e^{-\lambda_n})$. Alors :

$$Y_n \xrightarrow{ps} \begin{cases} 0 & \text{avec une probabilité de } 1-p \\ +\infty & \text{avec une probabilité de } p \end{cases}$$

3. Exemples pour $\lambda_n = o(\ln(n))$, $\lambda_n = 2\ln(1+n)$.

1. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^k$ converge, alors $\overline{\lim_{n\to+\infty}} X_n \leq k-1$ ps.
2. Etudier les valeurs d'adhérence de $(X_n)_n$ si $\lambda_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

Commençons par l'exos 1 :

Démonstration. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a que $\mathbb{P}(X_n = 1) = e^{-\lambda_n}\lambda_n$. D'où $\mathbb{P}(X_n \neq 1) = 1 - \lambda_n e^{-\lambda_n}$. Or la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ $f : x \mapsto 1 - xe^{-x}$ a pour dérivée $f'(x) = e^{-x}(x-1)$ qui est nulle ssi $x = 1$, str négative si $x < 1$, et str positive si $x > 1$. D'où f admet un minimum global en 1, et $f(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$. D'où $\mathbb{P}(X_n \neq 1) \geq 1 - \frac{1}{e}$. D'où la série $\sum \mathbb{P}(X_n \neq 1)$ diverge grossièrement. D'où par le second lemme de Borel Cantelli, les $(X_n)_n$ étant indépendants, $\mathbb{P}(X_n \neq 1 \text{ is }) = 1$.

2. $(Y_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'où elle admet une limite finie ssi $(Y_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

   Sa limite est nulle s'il existe un entier n tel que $X_n = 0$.

   Sa limite est finie non nulle si pour tout n, $X_n \neq 0$. Puisque $(Y_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang N, alors pour tout $n \geq N$, $X_n = 1$. Or $\mathbb{P}(\forall n \geq N,\ X_n = 1\} = 1 - \mathbb{P}(X_n \neq 1 \text{ is}) = 0$.

   Si $(Y_n)_n$ n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang, alors elle est croissante non majorée, donc alors elle diverge vers $+\infty$.

   Notons $A = \{Y_n \xrightarrow{ps} +\infty\}$ et $B = \{Y_n \xrightarrow{ps} 0\}$. On a la relation :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ X_n = 0\}$$

   Soit $N \in \mathbb{N}$, par indépendance des $(X_n)_n$:

$$\mathbb{P}(\forall n \in [\![1, N]\!],\ X_n \geq 1) = \prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_n \geq 1) = \prod_{k=1}^{N} (1 - e^{-\lambda_n}) \xrightarrow[N \to +\infty]{} p$$

   D'où $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\forall n \geq 1,\ X_n \geq 1\}) = \mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{X_n \geq 1\}) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{N} \{X_n \geq 1\} = p$ par décroissance de la suite d'évènements $(\cap_n^N \{X_n \geq 1\})_N$.

   (a) Si $\lambda_n = o(\ln(n))$, alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\lambda_n \leq \ln(n)$. D'où

$$\mathbb{P}(A) \leq \prod_{n=1}^{N-1} (1 - e^{-\lambda_n}) \prod_{n=N}^{+\infty} (1 - e^{-\ln(n)})$$

   Où :

$$\prod_{n=N}^{+\infty} (1 - e^{-\ln(n)}) = \prod_{n=N}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n}) = \prod_{n=N}^{+\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{M \to +\infty} \frac{N-1}{M} = 0$$

   D'où $Y_n \xrightarrow{ps} 0$ ps.

   (b) Si $\lambda_n = 2\ln(1+n)$, $1 - e^{-2\ln(1+n)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{q_{n+1}}{q_n}$ où

$q_n = \dfrac{n+1}{n}$. D'où :

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{2}$$

D'où $p = \dfrac{1}{2}$.

□

On passe à l'exo 2 :

Démonstration. 1. On étudie l'évènement $A_{k,n} = \{X_n \leq k-1\}$. Commençons par $k=0$ et $k=1$:

(a) $k=0$: $\sum \lambda_n$ converge. Or par Markov, $\mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(X_n) = \lambda_n$. D'où par comparaison avec une série convergente, $\sum \mathbb{P}(\overline{A_{0,n}})$ converge. Donc le lemme 1 de Borel Cantelli fournit que $\mathbb{P}(\overline{A_{0,n}}$ is $) = 0$. $\mathbb{P}(X_n = 0$ à partir d'un certain rang $) = 1$.

(b) $k=1$: $\sum \lambda_n^2$ converge. On a que $\mathbb{1}_{X_n > 1} \leq \dfrac{1}{2} X_n(X_n - 1)$. D'où $\mathbb{P}(X_n > 1) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_n>1}) \leq \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(X_n(X_n-1)) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)\right) = \dfrac{1}{2}(Var(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2 - \mathbb{E}(X_n)) = \dfrac{\lambda_n^2}{2}$. D'où par comparaison avec une série à termes positive, puis borel cantelli et tout le blabla on a bon :)

(c) Cas général $\sum \lambda_n^k$ converge :

$$\mathbb{1}_{X_n \geq k} \leq \frac{1}{k!} X_n(X_n-1)\dots(X_n-k)$$

D'où toujours par linéarité et positivité de l'espérance

$$\mathbb{P}(X_n \geq k) \leq e^{-\lambda_n} \sum_{m=k+1}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-k)\frac{\lambda_n^m}{m!} = e^{-\lambda_n} \sum_{m=k+1}^{+\infty} \frac{m!}{(m-k+1)!}\frac{\lambda_n^m}{m!}$$

en appliquant le changement d'indices $l = m-k+1$, puisque $\mathbb{E}X_n = \lambda_n$:

$$\mathbb{P}(X_n \geq k) \leq e^{-\lambda_n}\lambda_n^{k-1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^l}{l!} = \lambda_n^k$$

Par comparaisons avec une série à termes positives convergente, et par le lemme 1 de Borel Cantelli, $\mathbb{P}(\overline{\lim_{k \to +\infty}} \{X_n \geq k\}) = 0$. D'où $\mathbb{P}(\underline{\lim_{k\to+\infty}} X_k \leq k-1) = 1$, d'où $\limsup_{k \to +\infty} X_k \leq k-1$.

2. Notons $\lambda_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Par Riemann, $\sum \frac{1}{n^{\alpha k}}$ converge ssi $\alpha k > 1$ ssi $k > \frac{1}{\alpha}$. Notons $k = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$. Notons $Adh(X_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(X_n)_n$. Par ce qui a été fait au préalable, on a que $Adh(X_n) \subseteq \{1, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\}$. Soit $j \in \{1, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\}$. Montrons qu'il s'agit presque surement d'une valeur d'adhérence de $(X_n)_n$.
On a que $\mathbb{P}(X_n = j) = e^{-\frac{1}{n^\alpha}} \frac{1}{j! n^{\alpha j}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{j! n^{\alpha j}}$ dont la série des termes générales de cette suite diverge par Riemann. D'où par comparaisons de séries à termes positifs, $\sum_n \mathbb{P}(X_n = j)$ diverge. D'où par le second lemme de Borel Cantelli, $\mathbb{P}(X_n = j \text{ is }) = 1$. D'où presque surement, j est une valeur d'adhérence de $(X_n)_n$. D'où l'égalité souhaitée au sens de presque sûr :

$$Adh(X_n) = \{1, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\} \ ps$$

□

Référence

Olivier Garet, Aline Kurtzman (2019). *De l'intégration aux probabilités.* 2eme edition. ellipses, p. 290, 291.

Recasages

Leçon 223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Leçon 230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Leçon 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.