Riesz-Fischer

Théorème de Riesz-Fischer

Référence(s) :

- Walter Rudin ; *Analyse réelle et complexe*
- Haïm Brézis ; *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*

Leçons associées : 201, 205, 234

Théorème :

Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et pour tout $p \in [1; +\infty]$, l'espace $(\mathbb{L}^p(\Omega, \lambda_n), \|.\|_p)$ est complet.

Démonstration :

Etape 1 : $p = +\infty$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{L}^\infty$.

Soient :

$$A_k := \{x \in \Omega \quad | \quad |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$$
$$B_{n,m} := \{x \in \Omega \quad | \quad |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

Par définition de $\|.\|_\infty$, on a A_k et $B_{n,m}$ de mesure nulle pour tout $k, n, m \in \mathbb{N}$.
On note :

$$E := \bigcup_{k,n,m\in\mathbb{N}} A_n \cup B_{n,m}$$

On a donc E de mesure nulle.
Comme (f_n) est de Cauchy dans $\mathbb{L}^\infty$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \exists N_i \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N_i, \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{i}$$

Donc :

$$\forall x \notin B_{n,m},\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{i} \qquad (1)$$

Donc, pour tout $x \in E^c$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet, donc $(f_n(x))$ est convergente.

Pour tout $x \in E^c$, on note $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. On pose $f(x) = 0$ pour $x \in E$.
On passe à la limite quand $m \to \infty$ dans (1), et on a :

$$\forall x \notin E,\ \forall n \geq N_i, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{i}$$

Donc on a $f_n - f \in \mathbb{L}^\infty$, donc $f = f_n - (f_n - f) \in \mathbb{L}^\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

<u>Etape 2 : $p \in [1; \infty[$</u>

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^p$.
Il existe une sous-suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \|f_{n_i+1} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}$
On pose :

$$\begin{cases} g_k & = \sum\limits_{i=1}^{k} |f_{n_i+1} - f_{n_i}| \\ g & = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_{n_i+1} - f_{n_i}| \end{cases}$$

L'inégalité de Minkowski donne $\|g_k\|_p < 1$ pour tout k.
Le lemme de Fatou appliqué à g_k^p permet d'obtenir $\|g\|_p \leq 1$.
On a donc $g(x) < \infty$ presque-partout, donc la série :

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_i+1}(x) - f_{n_i}(x))$$

est absolument convergente pour presque-tout $x \in \Omega$, c'est-à-dire pour $x \in E^c$ avec $E \subset \Omega$ une partie de mesure nulle.
On note $f(x)$ sa somme et on pose $f(x) = 0$ pour $x \in E$.
Comme : $f_{n_1} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} (f_{n_i+1} - f_{n_i}) = f_{n_k}$
On a : $f(x) = \lim\limits_{i\to+\infty} f_{n_i}(x)$ presque-partout.

Reste à montrer que f est la limite de (f_n) dans $\mathbb{L}^p$.
Soit $\varepsilon > 0$, comme la suite (f_n) est de Cauchy dans $\mathbb{L}^p$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n, m > N,\ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$.
Pour $m > N$, le lemme de Fatou donne :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p \, d\lambda_n \leq \liminf_{i\longrightarrow\infty} \int_\Omega |f_{n_i} - f_m|^p \, d\lambda_n \leq \varepsilon^p$$

Donc on a $f - f_m \in \mathbb{L}^p$, donc $f \in \mathbb{L}^p$, et $\|f - f_m\|_p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui achève la démonstration.