Différentielle de l'exponentielle, application aux sous-groupes arbitrairement petits de $GL_n(\mathbb{K})$

Si jamais aucun développement pour l'exponentielle de matrice ne vous intéresse et que vous avez pas encore rempli les leçons de calcul différentiel, ce développement est peut-être fait pour vous ! On y calcule tout d'abord la différentielle de l'exponentielle de matrice et on en déduit une application en algèbre par application du théorème d'inversion local. Un développement mixte rentrant bien à la fois en algèbre et en analyse.
Recasages :

- **155 Exponentielle de matrice.**
- **215 Application différentiable.**
- **214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.**
- Possiblement **106 Groupe linéaire, sous-groupes de** $GL(E)$.

Le développement se compose de deux items suivant. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on pose une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Référence : Mneimé et Testard, Groupes de Lie classiques, p.59. Leur preuve suit les mêmes idées que la mienne, mais je n'aime pas trop leur manière de conclure.

Propriété 1. *L'application exp :* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*, de différentielle en* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,*

$$Dexp(M) : H \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}.$$

Application 2. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout G sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$, si $G \subset B(I_n, \varepsilon)$ alors $G = \{I_n\}$.*

Preuve. Je montre les deux propriétés en même temps.
Pour $k \geq 0$, on pose

$$f_k : \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto \frac{1}{k!}M^k. \end{array}$$

On a

$$\exp = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k.$$

On cherche à appliquer le théorème de différentiation sous le signe somme. Soit $k \geq 0$. La fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^1$, de différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$Df_k(M) : H \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}.$$

Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} \|Df_k(M).H\| &= \|\sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|M^i H M^{k-1-i}\| \\ &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} \|M\|^{k-1} \|H\| \end{aligned}$$

par sous multiplicativité. Finalement, on peut majorer la norme d'opérateur de $Df_k(M)$ lorsque $k \geq 1$,

$$\|Df_k(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))} \leq \frac{1}{(k-1)!} \|M\|^{k-1}.$$

Par convergence normale de $\sum \frac{1}{(k-1)!} M^{k-1}$ sur tout compact, les hypothèses du théorème de différentiation sous le signe somme sont vérifiées et donc exp est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$D\exp(M) : H \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}.$$

En particulier,

$$D\exp(0) : H \mapsto H.$$

Par théorème d'inversion locale, il existe U voisinage ouvert de 0 et V voisinage ouvert de I_n tel que

$$\exp : U \to V$$

soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset U$ car U est ouvert. On pose $B = B(0,r)$ et $B' = \exp(B)$. On s'est alors ramené à un voisinage borné de 0 tel que

$$\exp : B \to B'$$

soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(I_n, \varepsilon) \subset B'$ car B' est ouvert. On se donne maintenant G sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que $G \subset B(I_n, \varepsilon)$. On cherche à montrer que $G = \{I_n\}$. Soit $M \in G$ et $k \geq 1$. On a $M^k \in G \subset B'$, donc on peut lui appliquer

$$\exp^{-1} : B' \to B.$$

Par propriété de l'exponentielle,

$$\exp^{-1}(M^k) = k\ \exp^{-1}(M).$$

On a alors que la suite $(k\ \exp^{-1}(M))$ est contenue dans B donc est bornée. On en déduit que $\exp^{-1}(M) = 0$ puis $M = I_n$, ce qui termine la preuve.