

Leçons : 121, 230, 241, 245.

Notations et prérequis. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On introduit la fonction $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s$ de Riemann, bien définie sur le demi-plan des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à 1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_z(n) = \sum_{d|n} d^z$. Les fonctions arithmétiques σ_z sont multiplicatives, et pour tout $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma_z(p^m) = (1 - p^{z(m+1)})/(1 - p^z)$. Si f est une fonction multiplicative, et $|f(n)| = O(n^k)$ pour un certain $k > 0$, alors on a la formule du produit eulérien généralisé $\sum_{n \geq 1} f(n)/n^s = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m \geq 0} f(p^m)/p^m$, pour tout complexe s de partie réelle strictement plus grande que $k + 1$ (cf. développement). En particulier, $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} 1/(1 - p^{-s})$.

Théorème (Formule de Ramanujan-Wilson). Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \max(1, \Re(a) + 1, \Re(b) + 1, \Re(a + b) + 1)$,

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}.$$

Démonstration : Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \max(1, \Re(a) + 1, \Re(b) + 1, \Re(a + b) + 1)$. D'après la formule du produit eulérien pour ζ ,

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} f_p(a, b, s),$$

où

$$f_p(a, b, s) = \frac{1 - p^{-2s+a+b}}{(1 - p^{-s})(1 - p^{a-s})(1 - p^{b-s})(1 - p^{a+b-s})}.$$

Pour alléger les notations, notons $z = p^{-s}$, $\alpha = p^a$ et $\beta = p^b$. On effectue une décomposition en éléments simples : il existe $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ tels que

$$f_p(a, b, s) = \frac{1 - \alpha\beta z^2}{(1 - z)(1 - \alpha z)(1 - \beta z)(1 - \alpha\beta z)} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{1 - \alpha z} + \frac{C}{1 - \beta z} + \frac{D}{1 - \alpha\beta z}.$$

En isolant et en évaluant en $z = 1$, $z = \alpha^{-1}$, $z = \beta^{-1}$ et $z = \alpha^{-1}\beta^{-1}$, on obtient (ici, on explique bien la DES au jury pour éviter d'alourdir le tableau)

$$f_p(a, b, s) = \frac{1}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \left(\frac{1}{1 - z} - \frac{\alpha}{1 - \alpha z} - \frac{\beta}{1 - \beta z} + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta z} \right).$$

On retrouve ici 4 sommes de séries géométriques, que l'on peut réécrire sous forme de série. Notons que les hypothèses sur $s \in \mathbb{C}$ assurent la convergence de chacune des sommes.

$$\begin{aligned} f_p(a, b, s) &= \frac{1}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \sum_{m=0}^{+\infty} (1 - \alpha^{m+1} - \beta^{m+1} + \alpha^{m+1}\beta^{m+1})z^m \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \sum_{m=0}^{+\infty} (1 - \alpha^{m+1})(1 - \beta^{m+1})z^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1 - \alpha^{m+1})(1 - \beta^{m+1})}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} z^m. \end{aligned}$$

Or, puisque $\alpha = p^a$ et $\beta = p^b$, on reconnaît les expressions de $\sigma_a(p^m)$ et $\sigma_b(p^m)$. Ainsi, on obtient

$$f_p(a, b, s) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sigma_a(p^m)\sigma_b(p^m)}{p^{ms}}.$$

En réinjectant dans la première égalité et en utilisant la formule du produit eulérien généralisé, valable puisque $|\sigma_a(n)\sigma_b(n)| = O(n^{a+b})$, on obtient

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sigma_a(p^m)\sigma_b(p^m)}{p^{ms}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}. \quad \square$$

Application : Le prolongement méromorphe de la fonction ζ n'a pas de zéros sur le demi-plan $\{\Re(s) \geq 1\}$.

Démonstration : Soient $s > 1$ et $\theta \in \mathbb{R}^*$. On sait déjà que $\zeta(s)$ est strictement positive lorsque $s > 1$ car c'est une série à termes positifs. Ensuite, on applique la formule de Ramanujan-Wilson pour $a = i\theta$, $b = -i\theta$:

$$\frac{\zeta(s)^2\zeta(s-i\theta)\zeta(s+i\theta)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sigma_{i\theta}(n)|^2}{n^s}.$$

Le terme de droite est une fonction holomorphe (car c'est une série de Dirichlet) sur son demi-plan de convergence; notons σ_c son abscisse de convergence. Puisque $|\sigma_{i\theta}(n)| \leq d(n)$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n , $\sigma_c \leq 1$.

Supposons que ζ s'annule en $s + i\theta$. Alors, puisque le terme de droite dans l'égalité ci-dessus est un réel strictement positif et que $\zeta(2s)$ est un réel strictement positif, cela est absurde. Ainsi, ζ ne s'annule pas sur le demi-plan $\{\Re(s) > 1\}$. Notons qu'une démonstration de ce fait est donnée par la formule $1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n)/n^s$.

Supposons maintenant que ζ s'annule en $1 + i\theta$. Puisque $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$, $1 - i\theta$ est aussi un point d'annulation. Ainsi, $\zeta(s)^2\zeta(s-i\theta)\zeta(s+i\theta)$ admet une limite finie lorsque s tend vers 1. Par conséquent, la série demeure convergente pour $s \geq -1$, le prochain pôle du terme de gauche ($\zeta(-2) = 0$). Or, la série est divergente lorsque $s = 0$, absurde. Finalement, ζ n'a pas de zéros sur le demi-plan $\{\Re(s) \geq 1\}$. $\square$