UN THEOREME DE PERRON FROBENIUS

Théorème: Soit A une matrice stochastique irréductible. Alors, $\rho(A)=1$ et

$$Sp(A)\cap\mathbb{S}^1\subseteq\mathbb{C}^*$$

est un sous groupe des racines de l'unité.

Preuve:

- $1\in Sp(A)$ de vecteur propre $(1,\dots,1)\in\mathbb{C}^n$ donc, $\rho(A)\geq 1$.
- Soit $\lambda\in Sp(A)\subseteq\mathbb{C}$, de vecteur propre associé $X\in\mathbb{C}^n$. Soit $k_0\in[\![1,n]\!]$ tq. $|X_{k_0}|=\|X\|_\infty$.

Par inégalité triangulaire,

$$|(AX)_{k_0}|\leq\sum_{\ell=1}^n\underbrace{A_{k_0\ell}}_{\geq 0}|X_\ell|\leq|X_{k_0}|\sum_{\ell=1}^n A_{k_0\ell}=|X_{k_0}| \qquad (*)$$

Or, $(AX)_{k_0}=\lambda X_{k_0}$ donc, $|\lambda|\leq 1$ et $\rho(A)\leq 1$. D'où $\rho(A)=1$.

Tq. $Sp(A)\cap\mathbb{S}^1$ est un sous groupe des racines de l'unité.

- $1\in Sp(A)\cap\mathbb{S}^1$
- Si $\lambda\in Sp(A)\cap\mathbb{S}^1$ alors, $\lambda^{-1}=\bar\lambda$, et comme $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_A\in\mathbb{R}[X]$, donc $\chi_A(\lambda)=\chi_A(\bar\lambda)=0$.

Donc, $\lambda^{-1}\in Sp(A)\cap\mathbb{S}^1$.

- Il reste à montrer la stabilité par produit, et c'est toute la difficulté...

Lemme: Soit A stochastique, $\lambda\in Sp(A)\cap\mathbb{S}^1$ de vecteur propre X. Alors, $\forall\ell=1,\dots,n$,

$$A_{k_0\ell}X_\ell=A_{k_0\ell}\lambda X_{k_0}.$$

Preuve du lemme:

Comme $|\lambda|=1$, $(*)$ est en fait une série d'égalités ($|(AX)_{k_0}|=|X_{k_0}|$). Par les cas d'égalités de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, $\exists\theta\in\mathbb{R}$ tq.

$$\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ A_{k_0\ell}X_\ell=\underbrace{A_{k_0\ell}}_{\geq 0}|X_\ell|e^{i\theta} \qquad (1)$$

En outre, par définition de k_0, $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $A_{k_0\ell}|X_\ell|\leq A_{k_0\ell}|X_{k_0}|$. De plus, s'il existait $\ell=1,\dots,n$ tq. $A_{k_0\ell}|X_\ell|<A_{k_0\ell}|X_{k_0}|$ alors, $\sum_{\ell=1}^n A_{k_0\ell}|X_\ell|<\sum_{\ell=1}^n|X_{k_0}|A_{k_0\ell}$ et $(*)$ ne serait plus une égalité, ce qui n'est pas. Donc, $\forall\ell=1,\dots,n$, $A_{k_0\ell}|X_\ell|=A_{k_0\ell}|X_{k_0}|$ (2). La combinaison de (1) et (2) donne:

$$\sum_{\ell=1}^n\left(A_{k_0\ell}X_\ell=A_{k_0\ell}|X_{k_0}|e^{i\theta}\right)\quad\Rightarrow\quad\lambda X_{k_0}=|X_{k_0}|e^{i\theta}$$

En réinjectant dans (1), il vient bien $A_{k_0\ell}X_\ell=A_{k_0\ell}\lambda X_{k_0}$. ◁

Reprenons la preuve du thm. Extrayons l'information utile du lemme :

Soit $\lambda \in Sp(A) \cap S^1$ de vep X. Par irréductibilité de A, $\forall l = 1, \dots, n$, $\exists m \geq 1$ tq.

$$A^m_{k_0 l} > 0$$

Or, A^m est stochastique. Donc par le lemme ($\lambda^m \in Sp(A^m) \cap S^1$),

$$A^m_{k_0 l} \neq 0 \;\rightarrow\; A^m_{k_0 l} X_l = A^m_{k_0 l} \lambda^m X_{k_0}$$

$$\rightarrow\; X_l = \lambda^m X_{k_0}$$

$$\rightarrow\; |X_l| = |X_{k_0}|.$$

Donc toutes les composantes de X ont même module (module maximal) !

Soient finalement $\lambda, \mu \in Sp(A) \cap S^1$, de vep X et Y respectivement. Posons $Z = (X_k Y_k)_k$.

Z n'est pas nul, sinon X ou Y le serait par ce qui précède. Puis, pour $k = 1, \dots, n$,

$$(AZ)_k = \sum_{l=1}^{n} A_{kl} X_l Y_l.$$

Or, X_k est de module maximal par l'argument précédent. Donc, par le lemme,

$$A_{kl} X_l = \lambda A_{kl} X_k$$

Donc,

$$(AZ)_k = \sum_{l=1}^{n} \lambda A_{kl} X_k Y_l = \lambda X_k \sum_{l=1}^{n} A_{kl} Y_l = \lambda\mu X_k Y_k$$
$$= \lambda\mu Z_k.$$

Donc $\lambda\mu \in Sp(A) \cap S^1$ Δ.

Remarques :

- Sans doute mon développement préféré d'algèbre ! À première vue, il a l'air technique (et il l'est un peu, mais une fois compris, ça va tout seul, et il n'est ni désagréable à présenter ni à exposer. Pour ce qui est du temps, il ne faut quand même pas traîner, mais on a le temps ~~de détailler~~ d'expliciter quelques points à l'oral.
- Inutile de se lancer là-dedans sans savoir ce qu'est une matrice stochastique irréductible. Ces matrices sont très utiles pour les chaînes de Markov (non, ce n'est pas une excuse pour mettre ce dev dans une leçon de probas...) D'un autre côté, ne vous laissez pas effrayer : il n'y a pas 1000 choses à savoir : la définition, et savoir mq. si A est stochastique, alors A^n aussi $\forall n \geq 0$. Ces matrices ont plein d'autres propriétés amusantes, je vous laisse les découvrir ! :)
- Le point terrifiant dans ce développement est clairement le lemme, qui a une tête affreuse !! Son énoncé doit apparaître au tableau au moment de l'exposé et son utilité doit immédiatement être explicitée. Perso, j'invitais ~~le jury~~ l'audi...

à imaginer que ~~[illegible]~~ tous les coefficients de A étaient non nuls. On peut alors diviser par $A_{k_0 l}$ et en passant au module, on a bien $|X_{k_0}| = |X_l|\ \forall l$, et donc une savoureuse conclusion ! Il convient alors de dire que c'est pour garantir de pouvoir diviser par $A_{k_0 l}$ qu'intervient (en gros) l'hypothèse d'irréductibilité. Et là, c'est banco ! Le lemme est démystifié, et on peut sereinement dans sa preuve.

▷ Connaître les cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ est essentiel ici (cf. preuve du lemme). Géométriquement, $|z+z'| = |z|+|z'|$ si z et z' sont sur une même demi-droite (partant de 0) du plan complexe, on dit qu'ils sont positivement liés. Cette ~~définition~~ ~~[illegible]~~ caractérisation justifie en un clin d'œil la relation (1).

▷ En terme de temps, je conseille 4 minutes pour tout le début et 11 minutes pour faire le lemme et la suite. 4 minutes pour le début est suffisant, il n'y a presque rien à faire. Il faut juste insister sur la notation X_{k_0} qui est utilisée dans la suite.