

Un théorème d'approximation de Hardy et Littlewood

Thm: On considère une série entière avec $\forall n, a_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$.

Alors $\sum_{n=0}^N a_n \sim_{N \rightarrow \infty} N$.

Preuve: Idée de la preuve: On va montrer que pour certaines fonctions assez régulières sur $[0,1]$, on a

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \int_0^1 g(t) dt \quad (*)$$

Puis on appliquera $(*)$ à une fonction bien choisie.

Lemme 1: $(*)$ est vérifiée pour les polynômes.

Preuve: Par linéarité de l'intégrale, il suffit de le montrer pour les monômes X^k .

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (x^n)^k = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^{k+1})^n \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1+x+\dots+x^k} = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx \quad \checkmark$$

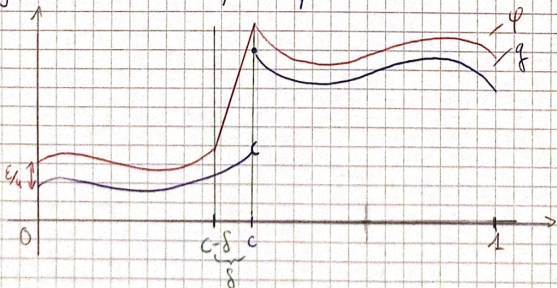
Lemme 2: $(*)$ est vérifiée pour les fonctions g continues sur $[0,1]$ (et avec $c \in]0,1[$ et cadlag sur $[0,1]$ (i.e. discontinue de 1^{ère} espèce en c ou continue).

Preuve: On commence par appliquer le théorème de Stone-Weierstrass de sorte à trouver

$$\text{deux polynômes } p, p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [0,1], p(x) \leq g(x) \leq P(x) \\ \text{et } \int_0^1 g(x) - p(x) dx < \varepsilon, \int_0^1 P(x) - g(x) dx \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

• Si g est continue, il suffit pour construire p d'approximer $g - \frac{\varepsilon}{2}$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ puis $g + \frac{\varepsilon}{2}$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ puis

• Si g a une discontinuité de première espèce on s'en sort encore en bricoulant:



On pose $\varphi: x \mapsto \begin{cases} g(x) + \varepsilon & \text{pour } x \in [0, c - \delta] \cup [c, 1] \\ \ell(x) & \text{pour } x \in]c - \delta, c[\text{ où } \ell(x) \text{ est l'app dont le graphe est la droite passant par } (c - \delta, g(c - \delta) + \frac{\varepsilon}{2}) \text{ et } (c, g(c) + \frac{\varepsilon}{2}) \end{cases}$

φ est continue $\rightarrow$ Sur pour l'approximer à $\frac{\varepsilon}{4}$ près par un polynôme P .

On a bien $P \geq g$ et de plus $\int_0^1 \varphi(t) - g(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}(1 - \delta) + \delta \sup |g(t) + \frac{\varepsilon}{2}| < \varepsilon$ pour δ assez petit.

On construit de la même manière P .

Comme les coeffs a_n sont positifs, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t) dt < \int_0^1 g(t) dt + \varepsilon$$

Et donc en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) = \int_0^1 g(t) dt$ } Yay! Fin du lemme 2

Pour finir, on considère la fonction $g: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{sur } [0, e^{-1/N}] \\ 1/t & \text{sur } [e^{-1/N}, 1] \end{cases}$

On a $\int_0^1 g(t) dt = \int_{1/e}^1 \frac{1}{t} dt = 1$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on évalue la série en $x = e^{-1/N}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) = \sum_{n \leq \frac{1}{\ln(1/x)}} a_n = \sum_{n=0}^N a_n = s_N$$

Donc $s_N \sim \frac{1}{1 - e^{-1/N}} \sim N$, Yay!

en effet, $e^{-1/N} \sim 1 - \frac{1}{N}$ donc $\frac{1}{1 - e^{-1/N}} \sim \frac{1}{1/N} = N$