47 Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

I. Généralités sur les séries

1. Définitions [ELA]

   Terme général, somme partielle, somme, reste, série géométrique

2. Premières propriétés [ELA]

   TG tend vers 0, divergence grossière, série télescopique, critère de Cauchy, convergence absolue

II. Séries à termes positifs

1. Comparaison [ELA]

   CV ssi majorée, théorèmes de comparaison, comparaison série intégrale, série de Riemann, série de Bertrand, règle $n^\alpha u_n$

   DEV 1 : développement asymptotique de la série harmonique

2. Critères de convergence [ELA]

   Règle de D'Alembert, règle de Cauchy

   DEV 2 : règle de Raabe-Duhamel

III. Séries à terme général quelconque [ELA] [GOU]

Semi-convergence, série alternée, critère de Leibniz, transformation d'Abel, critère d'Abel, produit de Cauchy, exemple pour l'exponentielle

IV. Calcul de sommes de séries

1. Séries entières [GOU]

   Série entière, lemme d'Abel, rayon de convergence, règle de D'Alembert, règle de Cauchy, nombres de Bell

2. Séries de Fourier [ELA2] [GOU]

   Coefficients de Fourier, série de Fourier, formule de Parseval, théorème de Jordan-Dirichlet, calcul de sommes

<u>Présentation :</u>

- Les séries numériques sont un cas très particulier de suites, dont on connait un plus grand nombre de critères de convergence. On dispose d'outils pour en étudier le comportement, que l'on n'a pas forcément pour des suites quelconques.
- On commence par des définitions puis des propriétés élémentaires. On finit cette partie avec un cas particulier du théorème qui dit qu'un EVN est un Banach ssi toute série ACV est CV (appliqué ici avec $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$). Cela motive le fait de s'intéresser plus particulièrement aux séries à TG positif.
- On regarde donc les STGP. D'abord on compare des séries entre elle et notamment pour avoir des estimations des sommes partielles ou du reste. Par exemple la comparaison série intégrale est très utile et permet d'obtenir de bons équivalents. Cela fait l'objet du premier développement, où l'on développe une méthode pour avoir une approximation de la série harmonique.
- On a aussi des méthodes qui sont très utiles pour déterminer la CV ou non d'une série.

- Ensuite on voit des cas particuliers de séries, qui ne sont pas forcément positives.
- On termine cette leçon avec des exemples de séries.

  Tout d'abord avec les séries entières qui permettent de résoudre de nombreux problèmes (ex : équa diff) et qui permettent de donner des formules générales à certains nombres.

  Enfin on aborde les séries de Fourier, qui permettent d'obtenir des sommes de séries qui ne sont pas évidentes au premier regard.

Développements :

- Développement asymptotique de la série harmonique

  - L'Oral a l'agrégation de mathématiques, Isenmann et Pecatte, p380

  - Oraux X-ENS 3, FGN, p224
- Règle de Raabe-Duhamel

  - Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani, p117

  - Développements d'analyse, Madère, p172

Références :

- [ELA] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [ELA2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

I Généralités sur les séries

On considère ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définitions

Déf 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
On note cette série $\sum u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'appelle le terme d'indice n de la série, et S_n s'appelle la somme partielle d'indice n de la série.

Déf 2 : On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge. Dans ce cas, la limite S s'appelle la somme de la série, notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Déf 3 : Si $\sum u_n$ est une série convergente, on appelle reste d'ordre n l'élément : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ex 4 : séries géométriques. Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$. Dans ce cas :
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
- $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$

2) Premières propriétés

Prop 5 : Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Rq 6 : La réciproque est fausse, considérer $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ car $\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Déf 7 : On dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers zéro.

Ex 8 : $\sum 2^n$ diverge grossièrement

Prop 9 : Muni des deux opérations :
- $\forall (u_n),(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \sum u_n = \sum (\lambda u_n)$

l'ensemble des séries numériques est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-SEV.

Déf 10 : On appelle série télescopique une série de la forme $\sum_{n\geq 1} u_n - u_{n-1}$.

Prop 11 : $\sum (u_n - u_{n-1})$ et $(u_n)_n$ ont même nature et en cas de convergence : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k - u_{k-1} = \lim_{n\to\infty} u_n - u_0$.

Ex 12 : $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $S = 1$.

Prop 13 : Critère de Cauchy : Une série $\sum u_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon$.

Ex 14 : La série harmonique est divergente.

Déf 15 : On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 16 : Toute série à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach qui est absolument convergente, est convergente.

II Séries à termes positifs

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites positives

1) Comparaison

Prop 17 : Une série à termes positifs converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Théorème 18 : On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :
1) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Ex 19 : pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente

Théorème 20 : Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et :

- En cas de convergence, les restes sont équivalents
- En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Théorème 21: On suppose que $u_n = O(v_n)$ ou que $u_n = o(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente. et on a une comparaison des restes

Théorème 22 (comparaison série-intégrale): Soit $a \in \mathbb{N}$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Ex 23 (Série de Riemann): la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Ex 24 (Série de Bertrand): la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Corollaire 25 (règle $n^\alpha u_n$): 1) Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers 0 et si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2) Si $(n^\alpha u_n)$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha \leq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Lemme 26: Soit $\alpha > 1$. Alors quand $n \to +\infty$:

DEV 1

$$R(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Appli 27 (développement asymptotique de la série harmonique): Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que quand $n \to +\infty$: $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) Critères de convergence

Théorème 28 (règle de D'Alembert): On suppose que $u_n > 0$ et que $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Alors :
1) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.
2) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Ex 29: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\sum \frac{a^n}{n}$ converge ssi $a < 1$.

Prop 30: Soit $\sum u_n$ relevant de la règle de D'Alembert. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0;1[$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $|R_n| \leq \frac{|u_{n_0+1}|}{1-\alpha}$. En fait $u_n \sim \frac{u_n - u_{n+1}}{1-\lambda}$ donc $R_n \sim \frac{u_{n+1}}{1-\lambda}$

Ex 31: $\sum_{n=0}^{12} \frac{1}{n!}$ donne une valeur approchée de e à moins de 3×10^{-8} près.

Théorème 32 (règle de Cauchy): On suppose que $u_n \geq 0$ et que $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Alors :
1) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge
2) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Ex 33: $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge

Prop 34: Soit $\sum u_n$ relevant de la règle de Cauchy. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0;1[$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $|R_n| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$.

Ex 35: Pour $\sum n^{-n}$, on a $R_4 < 0{,}00035$.

Prop 36 (règle de Raabe-Duhamel): Soit $u_n \geq 0$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to +\infty$.
Alors :
- si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge.
- si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge.

III Séries à terme général quelconque

Déf 37: Une série est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Déf 38: On appelle série alternée toute série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ où $(a_n)_n$ est de signe constant.

Théorème 39 (critère de Leibniz): Soit $(a_n)_n$ une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge et on a :
$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Ex 40: La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente

Prop 41 (transformation d'Abel): Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \lambda_n v_n$
On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_n S_n$$

Théorème 42 (critère d'Abel): Soit $\sum u_n$ tel que $u_n = \lambda_n v_n$, où :
1) (λ_n) est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0

2) La série $\sum v_n$ est bornée par une constante M.
Alors $\sum u_n$ est convergente et $|R_n| \leq M . u_{n+1}$.

Ex 43 : La série $\sum \frac{e^{-i\theta}}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Déf 44 : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On définit leur produit de Cauchy comme la série de terme général : $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Théorème 45 : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes, de somme S et T respectivement.
- Si au moins une des deux séries est absolument convergente, alors la série produit est convergente et a pour somme ST.
- Si les deux séries sont absolument convergentes, alors la série produit est absolument convergente.

Ex 46 : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors : $\exp(z+z') = \exp(z) . \exp(z')$

IV Calcul de sommes de séries

1) Séries entières

Déf 47 : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe.

Lemme 48 (lemme d'Abel) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors :
1) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est ACV
2) $\forall r \in]0 ; |z_0|[$, $\sum a_n z^n$ CVN dans $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq r\}$.

Déf 49 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup\{r \geq 0 ; (|a_n| r^n)_n$ est bornée$\}$ est appelé rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. On a :
- $\forall |z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- $\forall |z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge
- $\forall 0 \leq r < R$, $\sum a_n z^n$ CVN sur $\overline{D}(0,r)$

Le disque $D(0,R)$ est le disque de convergence de la série.

Rem 50 : Sur le cercle $|z| = R$, la série entière peut ou non converger

Prop 51 (règle de D'Alembert) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$ (avec $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Prop 52 (règle de Cauchy) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$.

Ex 53 : $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Théorème 54 (Nombres de Bell) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$. Par convention, $B_0 = 1$.
Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$ **DEV 2**

2) Séries de Fourier

Déf 55 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et dans L^1 (noté $f \in L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$). On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) . \cos(nt) dt$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) . \sin(nt) dt$

Déf 56 : Soit $f \in L_1^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique :

$$S(f) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n(f) e^{-inx} + c_{-n}(f) e^{inx}\right) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) . \cos(nx) + b_n(f) . \sin(nx)\right)$$

Théorème 57 (Parseval) : Soit $f \in L_2^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Ex 58 : Avec $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi ; \pi]$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Théorème 59 (Jordan-Dirichlet) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en ce point x vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, donc vers $f(x)$ si f est continue en x.

Ex 60 : Avec $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi ; \pi]$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.