

Il faut mieux se placer sur X général.

Leçon N° 234: Fonctions et espaces de fonctions

On se place sur $\mathbb{R}$ muni de son tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

I) Mesure et intégrale de Lebesgue

1) Rappel sur la mesure de Lebesgue

Théorème 1: Il existe une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation et coïncidant sur les compacts de $\mathbb{R}$ avec la longueur.

On appelle cette mesure λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

On a $\lambda([a, b]) = b - a$.

On appelle cette mesure λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 2: $N \subseteq \mathbb{R}$ est dit négligeable lorsque il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$ et $N \subseteq A$.

On pose $N\lambda := \{N \subseteq \mathbb{R}, N \text{ négligeable}\}$.

Théorème 3: La tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup N\lambda$ est la tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \{A \cup N, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), N \in N\lambda\}$. On l'appelle la tribu de Lebesgue ou complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par λ .

On pose $V(A, N) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times N\lambda$, $\lambda(A \cup N) := \lambda(A)$.

Cette mesure est l'unique prolongement possible de λ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Par la suite, on va noter simplement λ .

2) Définition de l'intégrale de Lebesgue

Définition 4: On définit l'intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ avec $I \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ par $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i) \in [0, +\infty[$.

Définition 5: Si maintenant f est mesurable positive, on pose $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda, \phi \text{ étagée positive et } \phi \leq f \right\} \in [0, +\infty]$.

On dira alors que f est λ -intégrable lorsque $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < +\infty$.

Lebesgue - intégrales

Théorème 6: (convergence monotone) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on pose

$$V_n \in X, f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

f est mesurable et $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Lemme 7: (Fatou). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors $\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Définition 8: Par $L^1(\mu)$, nous désignons la famille de toutes les fonctions complexes mesurables f sur X pour lesquelles $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

Définition 9: $f, g \in L^1(\mu)$, on pose $f + g = u + v$, $u, v: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

On définit pour tout ensemble mesurable E , $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot 1_E d\mu$.

On pose une fonction $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g^+ = \max(0, g)$, $g^- = \max(0, -g)$.

Proposition 10: L'intégrale est linéaire et vérifie l'inegalité triangulaire.

Théorème 11: (convergence dominée). Soient (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X et f une fonction mesurable sur X telle que

1) (f_n) converge simplement sur X vers f

2) $\exists g \in L^1(\mu)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors, 1) $f \in L^1(\mu)$

2) $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Application 12. Soit $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} (1 + \frac{x^n}{n})^n d\mu$

alors $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} 1 d\mu$.

Théorème 13 (Fubini - Tonelli) Soit $f: (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable.

Alors $\int_X \int_Y f(x, y) dy = \int_Y \int_X f(x, y) dx = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)$.

Théorème 14: (Fubini - Lebesgue) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$, alors $\int_X \int_Y f(x, y) dy = \int_Y \int_X f(x, y) dx$.

Application 15: $V \subset \mathbb{C}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Théorème 16: (Changement de variable dans $\mathbb{R}^d$) Soit φ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$. Alors $\int_V f(u) du = \int_U f(\varphi(u)) |J\varphi(u)| du$.

II) Espaces L^p , $1 \leq p < +\infty$

1) De $\mathcal{L}^p \subset L^p$

Définition 17: Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $\mathcal{L}^p(\mu)$ = fonctionnelles

telles que $\int |f|^p d\mu < +\infty$. et on note $L^p(\mu) = \overline{\mathcal{L}^p(\mu)}$.

On note $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f \text{ mesurable} \mid \exists C \geq 0, |f(x)| \leq C \text{ p.p.}\}$.

et $L^\infty(\mu) = \overline{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$.

À partir de maintenant, pour $p \in [1, +\infty]$, on note q son exposant conjugué: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 18 (Inégalité de Hölder) Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$.

Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Théorème 19: (Inégalité de Minkowski) Soient $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Alors $f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition - Proposition 20: $L^1(\mu) = \overline{\mathcal{L}^1(\mu)}$

où $(f \sim g) \Leftrightarrow \int |f-g| d\mu = 0$.

$(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 21: Un espace vectoriel normé est complet si toute série doublement convergente converge.

Théorème 22: (Riesz - Fischer) : $\forall p \in [1, +\infty]$,

$(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

Théorème 23: Soit $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\exists g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ tel que $p \neq +\infty$.

$\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\langle \varphi, f \rangle = \int fg d\mu$

et $\|\varphi\| = \|g\|_q$.

Donc $\mathcal{L}^p(\mu) \simeq \mathcal{L}^q(\mu)$.

Corollaire 24: L'espace $\mathcal{L}^2(\mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int fg d\mu$.

2) Convergence et représentation.

Définition - Proposition 25: Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

on définit $f \wedge g: x \mapsto \min(f(x), g(x))$ et $f \vee g: x \mapsto \max(f(x), g(x))$.

Proposition 26: Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$,

$f \wedge g$ définit de même que ci-dessus et $f \wedge g \in \mathcal{L}^p$ et $\|f \wedge g\|_p \leq \|g\|_p$.

Proposition 27: Soit ϕ une fonction mesurable positive telle que $\int \phi d\mu < +\infty$ et $\lambda_\phi(x) = \phi(x)$.

$\forall \lambda \geq 1$, posons $\phi_\lambda(x) = \min(\phi(x), \lambda)$.

Alors $\forall f \in \mathcal{L}^p$, $(\phi_\lambda f)$ converge vers f dans L^p .

Corollaire 28: $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

III) Transformée de Fourier.

1) Généralités

Définition 29: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \langle x, \xi \rangle} dx$, on pose $\tilde{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i \langle \xi, y \rangle} d\xi$ et $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ est la transformée de Fourier $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

Proposition 30: $\mathcal{F}$ est linéaire de L^1 dans C_0 .

Proposition 31: Soient $(f, g) \in (L^1(\mathbb{R}^d))^2$.

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{d/2} \hat{f} \hat{g}.$$

Proposition 32: Soient $(f, g) \in (L^1(\mathbb{R}^d))^2$, $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx$.

Proposition 33: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{f}_\lambda(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \langle x, \lambda t \rangle} dx$.

$$\text{Alors } \hat{f}_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda^{d/2}} \hat{f}\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

Proposition 34: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\text{PF } \hat{f} \in \mathbb{R}^d, \hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi).$$

Proposition 35: $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

$\mathcal{F}: L^1 \cap L^2$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 36: $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$ se prolonge de façon unique en une isométrie de L^2 dans L^2 .

2) Applications

Théorème 37 (Lévy): Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. réelles, $(X_n \xrightarrow{d} X) \Leftrightarrow (V \in \mathbb{R}, E[e^{itX_n}] \rightarrow E[e^{itX}])$.

Application 38: (Théorème central limite).

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a. réelles i.i.d. dans L^2 .

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sigma^2 = V(X)$$

$$\text{Alors } \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$