1. Méthode de Laplace

On se donne $I = (a, b)$ un intervalle borné ou non.

Théorème 1.1. — *Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $f : I \to \mathbb{C}$ continue. On fait les hypothèses suivantes.*

- *Pour tout $t > 0$, on a $e^{-t\varphi} f \in L^1(\mathrm{d}x)$.*
- *La fonction $\varphi' : I \to \mathbb{R}$ s'annule en un unique point $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) > 0$.*
- *On a $f(x_0) \neq 0$.*

Alors, pour une certaine constante $\alpha_0 \in \mathbb{C}$,

$$\int_I e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x \sim \alpha_0 \cdot e^{-t\varphi(x_0)}/\sqrt{t}.$$

Démonstration. — • L'idée est de se ramener à une intégrale de Gauss, via un changement de variable. En vertu de la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)^2 \int_0^1 (1 - s)\varphi''(x_0 + s(x - x_0))\mathrm{d}s = \varphi(x_0) + (x - x_0)^2\psi(x),$$

où $\psi : I \to \mathbb{R}$ est continue, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I \setminus \{x_0\}$ et vérifie $\psi(x_0) = \varphi''(x_0)/2$. On a donc,

$$F(t) = \int_I e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x = e^{-t\varphi(x_0)} \int_I e^{-t(x-x_0)^2\psi(x)} f(x)\mathrm{d}x,$$

et il à reste se donner une racine de $(x - x_0)^2\psi(x)$, mais ceci n'est possible qu'au voisinage de x_0. On se donne donc $\delta_1 > 0$ tel que $\psi > 0$ sur $I_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ et on considère $\rho(x) = (x - x_0)\sqrt{\psi(x)}$ qui est une fonction continue sur I_1 et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I_1 \setminus \{x_0\}$. Montrons que ρ est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ par un prolongement de sa dérivée : on a, pour $x \neq x_0$,

$$\rho'(x) = \sqrt{\psi(x)} + (x - x_0)\psi'(x)/\sqrt{\psi(x)}.$$

Or $(x - x_0)\psi'(x) = ((x - x_0)\psi(x))' - \psi(x)$ et,

$$((x-x_0)\psi(x))' = \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}\right)' = \frac{\varphi'(x)(x - x_0) - \varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{\varphi'(x)}{x - x_0} - \psi(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \varphi''(x_0) - \psi(x_0).$$

D'où le prolongement continu $\rho'(x_0) = \sqrt{\psi(x_0)}$. En particulier, on a $\rho'(x_0) > 0$ et l'on peut choisir $0 < \delta_0 \leqslant \delta_1$ tel que $\rho' > 0$ sur $I_0 = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ et ρ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de I_0 sur $\rho(I_0)$.

• On considère maintenant une fonction $\theta \in \mathscr{D}(I_0)$ telle que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et $\theta \equiv 1$ sur $[x_0 - \delta_0/2, x_0 + \delta_0/2]$. Le changement de variable $y = \rho(x)$ donne alors,

$$\int_{I_0} \theta(x)e^{-t(x-x0)^2\psi(x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\rho(I_0)} e^{-ty^2} h(y)dy,$$

où $h(y) = \theta(\tau(y))f(\tau(y))/\rho'(\tau(y))$ et $\tau(y) = \rho^{-1}(y)$. On remarque que $h \in \mathscr{C}_c^1(\rho(I_0))$ et l'on prolonge h par 0 en dehors de $\rho(I_0)$ pour obtenir,

$$\int_I \theta(x)e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x = e^{-t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-ty^2} h(y)\mathrm{d}y = e^{-t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} h\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{t}}.$$

Or pour tout $t > 0$, $z \in \mathbb{R}$, on a $|e^{-z^2} f(z/\sqrt{t})| \leqslant \|h\|_\infty e^{-z^2}$ donc une domination L^1, et le théorème de convergence dominée assure que,

$$\sqrt{t}e^{t\varphi(x_0)} \int_I \theta(x)e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} h(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z \overset{\text{déf}}{=} \alpha_0,$$

et l'on a en fait $\alpha_0 = f(x_0)\sqrt{2\pi/\varphi''(x_0)}$. Il nous reste à relativiser le reste de l'intégrale :

$$R(t) = \int_I (1 - \theta(x))e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Mais sur $\mathrm{Supp}(1-\theta)$, on a $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geqslant \mu > 0$ donc, pour $t > 1$, en écrivant $t\varphi(x) = \varphi(x) + (1-t)\varphi(x)$, on obtient $-t\varphi(x) \leqslant -\varphi(x) - (t - 1)\varphi(x_0) - (t - 1)\mu$ soit,

$$|R(t)| \leqslant e^{-t\varphi(x_0)} e^{-\varphi(x_0)+\mu} \int_I e^{\varphi(x)}|f(x)|\mathrm{d}x \cdot e^{-t\mu}.$$

En particulier, on a $e^{-t\varphi(x_0)}|R(t)| \leqslant \alpha_1 e^{-t\mu} < +\infty$ pour tout $t < 1$ et donc cette contribution est négligeable devant la précédente. D'où le résultat. □