PAR 5 POINTS PASSE UNE CONIQUE

Théorème : Soient A, B, C, D, E cinq points distincts d'un plan affine.

(1) Il existe une conique $\mathcal{E}$ passant par A, B, C, D, E.

(2) $\mathcal{E}$ est unique ssi 4 points parmi ces 5 ne sont pas alignés.

(3) $\mathcal{E}$ est non dégénérée ssi 3 points sont non alignés

Preuve :

(1) Si les 5 points sont alignés, un couple de droites convient. Supposons les non alignés. On considère (A, B, C) une base de $\mathcal{P}$ quitte à renommer. On note (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques dans (A, B, C). Une conique de $\mathcal{P}$ a une équation dans (A, B, C) de la forme :

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + pXY + qXZ + rYZ = 0.$$

Ainsi, une conique passe par A, B, C ssi son équation est de la forme :

$$pXY + qXZ + rYZ = 0.$$

Si on note $D = (x_1, y_1, z_1)$ et $E = (x_2, y_2, z_2)$ les coordonnées de D et E dans (A, B, C), alors, p, q et r sont solutions du système :

$$(*) \begin{cases} p x_1 y_1 + q x_1 z_1 + r y_1 z_1 = 0 \\ p x_2 y_2 + q x_2 z_2 + r y_2 z_2 = 0. \end{cases}$$

Ce système est de rang ≤ 2, donc on a toujours des solutions non nulles, d'où l'existence de $\mathcal{E}$.

car alors $\ker(*) \geq 2$.

(2) Plusieurs coniques conviennent ssi le rang de $(*)$ est ≤ 1, ssi les mineurs sont nuls :

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 z_1 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad y_1 y_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_1 \\ 1 & y_2 & y_2 \\ 0 & z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad z_1 z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_2 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

Si le rang de $(*)$ est ≤ 1, alors il y a une infinité de coniques possibles.

Si D et $E \notin (AB) \cup (AC) \cup (CB)$, alors, $x_1 x_2 y_1 y_2 z_1 z_2 \neq 0$, donc les déterminants nuls impliquent que $A \in (DE)$, $C \in (DE)$ et $B \in (DE)$. Donc A, B, C sont alignés, pas possible.

Donc, par exemple, $D \in (AB)$ i.e. $z_1 = 0$. Comme $D \neq A, B$, $x_1 y_1 \neq 0$ et

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & 0 \\ x_2 y_2 & y_2 z_2 \end{vmatrix} = x_1 y_1 y_2 z_2 \; ; \; 0 = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & 0 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = x_1 y_1 x_2 z_2$$

donc, $x_2 z_2 = y_2 z_2 = 0$. Si $z_2 \neq 0$, alors, $x_2 = y_2 = 0$, et $E = C$, faux. Donc $z_2 = 0$ i.e. $(AB) \ni E$. 4 points sont donc alignés.

Réciproquement, si 4 points sont alignés, alors une infinité de couples de droites convient.

(3) La conique $pXY + qXZ + rYZ = 0$ est lieu d'annulation de la f.q. de matrice $M := \begin{bmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix}$ de déterminant $2pqr$. $\mathcal{C}$ est donc non dégénérée ssi $pqr \neq 0$.

* Si $pqr = 0$, alors par ex. $p = 0$, donc $\mathcal{C} : Z(qX + rY) = 0$ est un couple de droites : 3 points sont alignés.

* Si 3 points sont alignés, alors $\mathcal{C}$ est un couple de droites, (dessin + unicité). Son équation est donc $\varphi(x, y, z)\psi(x, y, z) = 0$ avec φ et ψ deux formes linéaires. Or, $\psi\varphi = \frac{1}{4}((\varphi+\psi)^2 - (\varphi-\psi)^2)$, donc M et $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ sont congruentes et

Remarques :

▷ Le développement fait peur et est calculatoire, mais en fait je ne le trouve pas si horrible que ça. Il faut quand même bien le connaître pour le rentrer en 15 minutes.

▷ Bien sûr, la difficulté principale, c'est les coordonnées barycentriques. C'est un attendu de la leçon sur la convexité de toute façon.
En particulier ici, il faut montrer la formule qui donne la forme de l'équation d'une cônique en barycentrique. Le Eiden le fait assez honnêtement, mais ce n'est pas complètement trivial, il faut s'y pencher.