leçon : 220 EDO $x' = f(t,x)$
205 Espaces complets
201 Espaces de fonctions
206 Thm de point fixe

Théorème de Cauchy-Lipschitz local

13

Références :
- cours de Laurent Berger

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0, x_0) \in U$, alors il existe une solution locale au problème de Cauchy (P) : $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.
De plus, si (J_1, x_1) et (J_2, x_2) sont deux solutions locales de (P), alors elles coïncident sur $J_1 \cap J_2$.

preuve : 1 <u>Existence</u>

On choisit $h, r, K, M > 0$ tels que

(i) $[t_0-h, t_0+h] \times \overline{B(x_0, r)} \subset U$

(ii) f est K-lip$^{\text{nne}}$ par rapport à la seconde variable sur $[t_0-h, t_0+h] \times \overline{B(x_0,r)}$

(iii) f est bornée par M sur $[t_0-h, t_0+h] \times \overline{B(x_0,r)}$

(iv) $h < \min\left(\frac{r}{M}, \frac{1}{2K}\right)$ (Je propose ici de laisser un blanc puis de le remplir au cours de la preuve pour l'amour de la pédagogie :p)

Rq : Si $0 < h' < h$, alors (i), (ii) et (iii) restent vraies pour (h', r, K, M)

- On pose $F = \{ x : [t_0-h, t_0+h] \to \overline{B(x_0,r)} \ \mathcal{C}^0 \mid x(t_0) = x_0 \}$
On munit F de la distance $d(x,y) = \sup_{t \in [t_0-h, t_0+h]} \| x(t) - y(t) \|$, ce qui en fait un espace complet.

- On pose $\phi : \begin{cases} F \to \{ x : [t_0-h, t_0+h] \to \mathbb{R}^n \ \mathcal{C}^0 \mid x(t_0) = x_0 \} \\ x \mapsto \left[t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right] \end{cases}$

lemme : Soit $x \in F$. Si $\phi(x) = x$, alors $(]t_0-h, t_0+h[, x_{|]t_0-h, t_0+h[})$ est une solution locale de (P).

- On s'est donc ramené à la recherche d'un point fixe pour ϕ.
Il faut choisir h assez petit pour que ϕ soit à valeurs dans F et contractante.

Soit $x \in F$. Soit $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Alors

$$\| \phi(x)(t) - x_0 \| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \| f(s, x(s)) \| ds \right| \leqslant Mh \quad \text{par (iii)}$$

On choisit $h \leqslant \frac{r}{M}$ (donc ϕ est à valeurs dans F)

Soient $x_1, x_2 \in F$ et $t \in [t_0-h, t_0+h]$

$$\| \phi(x_1)(t) - \phi(x_2)(t) \| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \| f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \| ds \right| \leqslant Kh\, d(x_1, x_2) \text{ par (ii)}$$

On passe au sup sur t : $d(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leqslant Kh\, d(x_1, x_2)$

On choisit $h \leqslant \frac{1}{2K}$ (donc ϕ est $\frac{1}{2}$-contractante)

$\phi : F \to F$ est contractante et F est complet donc ϕ admet un point fixe

② **Unicité :**

Soient (J_1, x_1), (J_2, x_2) deux solutions locales de (P).

On pose $A = \{ t \in J_1 \cap J_2 \mid x_1(t) = x_2(t) \}$.

J_1 et J_2 sont des intervalles donc $J_1 \cap J_2$ est un intervalle (non vide car contient t_0)

donc $J_1 \cap J_2$ est connexe. De plus, J_1 et J_2 ouverts donc $J_1 \cap J_2$ ouvert.

. MQ A est fermé dans $J_1 \cap J_2$:

$x_1|_{J_2} - x_2|_{J_1} : J_1 \cap J_2 \to \mathbb{R}$ est continue □

. MQ A est ouvert dans $J_1 \cap J_2$:

Soit $\tau \in A$, f localement lip$^{\text{nne}}$ par rapport à la seconde variable donc

$\exists\, h, r, K > 0$ (i) $[\tau-h, \tau+h] \times \overline{B(x_1(\tau), r)} \subset U$

(ii) f K-lip$^{\text{nne}}$ par rapport à x sur $[\tau-h, \tau+h] \times \overline{B(x_1(\tau), r)}$

(iii) $\forall t \in [\tau-h, \tau+h]$ $(x_1(t), x_2(t)) \in \overline{B(x_1(\tau), r)}$

(iv) $[\tau-h, \tau+h] \subset J_1 \cap J_2$

$$\forall t \in [\tau-h, \tau+h] \quad \| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \| f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \| ds \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{\tau}^{t} K \| x_1(s) - x_2(s) \| ds \right| \quad \text{par (ii) et (iii)}$$

Par Gronwall, $\forall t \in [\tau-h, \tau+h]$ $\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant 0$

D'où A ouvert dans $J_1 \cap J_2$ □

Par connexité de $J_1 \cap J_2$, $A = J_1 \cap J_2$.