

Inversion de la fonction caractéristique

Leçons : 261, 263

Théorème 1

Soit μ mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\varphi : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$ sa fonction caractéristique. Alors si $a < b$,

$$\mu(]a, b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a, b\}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

Démonstration. Soit, pour $T > 0$, $I_T = \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = \int_{-T}^T \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} d\mu(x) \right) dt$.

En remarquant que $\forall t, \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \right| = \left| \int_a^b e^{-ity} dy \right| \leq b-a$, on voit que le théorème de Fubini est applicable.

De plus $\overline{I_T} = \int_{-T}^T \frac{e^{ita} - e^{itb}}{-it} \varphi(-t) dt = \int_{-T}^T \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} \varphi(u) du = I_T$ par un changement de variable $u = -t$, donc $I_T \in \mathbb{R}$.

Ainsi,

$$I_T = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^T \frac{\sin(t(x-a))}{t} dt - \int_{-T}^T \frac{\sin(t(x-b))}{t} dt \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} R(x-a, T) - R(x-b, T) d\mu(x)$$

où $R(\theta, T) = \int_{-T}^T \frac{\sin(\theta t)}{t} dt$

Mais si $\theta > 0$, $R(\theta, T) = 2 \int_0^T \frac{\sin(\theta t)}{t} dt = 2 \int_0^{\theta T} \frac{\sin(x)}{x} dx = 2S(\theta T)$ où $S(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}$.

Si $\theta < 0$, $R(\theta, T) = -R(|\theta|, T)$ donc dans tous les cas, $R(\theta, T) = 2(\text{sgn}\theta)S(|\theta|T)$.

Or, $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ donc $R(\theta, T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \pi(\text{sgn}\theta)$ donc à x fixé,

$$R(x-a, T) - R(x-b, T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \\ 2\pi & \text{si } a < x < b \\ \pi & \text{si } x = a \text{ ou } x = b \end{cases}$$

De plus, $\forall \theta, T, R(\theta, T) \leq 2 \sup_{y \in \mathbb{R}_+} S(y) < +\infty$ car S admet une limite à l'infini et est continue sur \mathbb{R}_+ . Donc par convergence dominée, $\frac{1}{2\pi} I_T \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mu(]a, b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a, b\})$. \square

Corollaire 2

Si de plus $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$, alors μ est une mesure à densité par rapport à la mesure

de Lebesgue, de densité $f : y \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} \varphi(t) dt$

Démonstration. Sous cette hypothèse, si $a < b$, $t \mapsto \varphi(t) \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = \mu(]a, b[) + \frac{1}{2} \mu(\{a, b\}) \leq \frac{b-a}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt$$

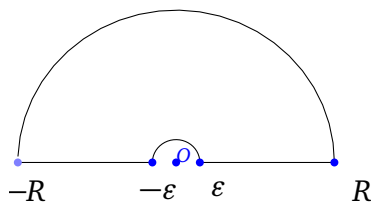
En particulier, $\mu(]a, b[) + \frac{1}{2} \mu(\{a, b\}) \xrightarrow{b \rightarrow a} 0$. Or, si $\mu(\{a\}) > 0$, on aurait $\forall b > a, \mu(]a, b[) + \frac{1}{2} \mu(\{a, b\}) \geq \frac{1}{2} \mu(\{a\}) > 0$ ce qui est absurde. Donc $\mu(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Par suite, si $x \in \mathbb{R}, h > 0$,

$$\begin{aligned} \mu(]x, x+h[) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx} - e^{-it(x+h)}}{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+h} e^{-ity} dy \right) \varphi(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} \varphi(t) dt \right) dy \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini. Donc comme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par la classe $\{]x, x+h[, (x, h) \in \mathbb{R}^2\}$ qui est stable par intersection finie, par le théorème de classe monotone, on en déduit que μ a la densité annoncée par rapport à la mesure de Lebesgue. \square

Remarque. • La démonstration repose sur le fait que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet), ce qui est loin d'être évident. Le fait que cette intégrale impropre converge est élémentaire : il suffit de faire une intégration par parties. Pour sa valeur, il y a un bon nombre de preuves différentes, dont un calcul par la transformée de Laplace (dans GOURDON 2009), une astuce pour se ramener au calcul de $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx$, ou bien une preuve par la formule de Cauchy qui est particulièrement élégante.



Soit $f : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ holomorphe. Sur le contour dessiné, on a

$$0 = \int_{-R}^{-\epsilon} f(t) dt + \int_{\epsilon}^R f(t) dt - \int_0^{\pi} f(\epsilon e^{i\theta}) \times (i\epsilon e^{i\theta}) d\theta + \int_0^{\pi} f(R e^{i\theta}) \times (iR e^{i\theta}) d\theta$$

Comme \cos est paire, on voit que la somme des deux premiers termes vaut $i \int_{\epsilon \leq |t| \leq R} \frac{\sin t}{t} dt$.

Par ailleurs, l'intégrande du troisième terme est $i \exp(i\varepsilon e^{i\theta})$ qui converge simplement vers 1 et est de module $\exp(-\varepsilon \sin \theta) \leq 1$ donc par convergence dominée, l'intégrale tend vers $i\pi$ quand ε tend vers 0.

De la même manière, le quatrième terme tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est bien définie et vaut π .

- On peut montrer avec des arguments analogues à ceux du théorème que si $a \in \mathbb{R}$, $\mu(\{a\}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-ita} \varphi(t) dt$. Ainsi, comme les intervalles de la forme $]a, b[$ constituent une classe stable par intersection finie, une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique.
- Si X est une variable aléatoire telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, alors X et $-X$ ont la même loi.
- Si $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ et X_1 et X_2 sont indépendants, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Référence : DURRETT 2010, p. 105