

Je vais commencer par donner des résultats sur les nombres de cycles d'une permutation aléatoire, puis discuterai de comment en faire un développement. J'entends ici par "nombre de cycles de σ " le nombre d'orbites de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sous l'action de $\langle \sigma \rangle$. Par exemple, $(123)(56) \in \mathfrak{S}_6$ a 3 cycles.

Lemme 1. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $U_i \sim U(\llbracket 1, i \rrbracket)$. On pose $S_n = \tau_{1, U_1} \circ \dots \circ \tau_{n, U_n}$ et C_n le nombre de cycles de S_n . Alors :

1. $\forall n \geq 1, S_n \sim U(\mathfrak{S}_n)$.
2. $\forall n \geq 1, C_n = \sum_{i=1}^n 1_{U_i=i}$

Preuve.

1. Par récurrence :

- Pour $n = 1$, ok.
- Hérédité : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+1} = \sigma) &= \mathbb{P}(S_{n+1} = \sigma \cap \sigma(U_{n+1}) = n+1) \\ &= \mathbb{P}(S_n \circ \tau_{n+1, U_{n+1}} = \sigma \cap U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1)) \\ &= \mathbb{P}(S_n = \sigma \circ \tau_{n+1, \sigma^{-1}(n+1)} \cap U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1)) \\ &= \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \text{ par indépendance et hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

(Pour la dernière ligne, on voit $\sigma \circ \tau_{n+1, \sigma^{-1}(n+1)}$ comme un élément de $\mathfrak{S}_n$.)

2. Par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$, puis $C_{n+1} = C_n + 1$ si $U_{n+1} = n+1$ (on rajoute un cycle), C_n sinon (faire un dessin des cycles).

□

Théorème 1. Sous les mêmes hypothèses :

1. $\frac{C_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 1$.
2. $\frac{C_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ en probabilités.
3. $\frac{C_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ p.s..
4. $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, 1)$.

Lemme 2. (admis) Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq \frac{1}{2}$. Alors $|\ln(1+u) - u| \leq |u|^2$ où $\ln$ désigne la détermination principale du logarithme complexe.

En conséquence, il existe ϵ une fonction bornée telle que si $|u| \leq \frac{1}{2}$, $\ln(1+u) = u + \epsilon(u)u^2$.

Preuve.

1. Calculons l'espérance et la variance de C_n .

$$\mathbb{E}[C_n] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} =: H_n \text{ (la somme harmonique) par linéarité.}$$

$$\text{Var}(C_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(1_{U_i=i}) \text{ par indépendance, donc } \text{Var}(C_n) \leq H_n.$$

$$\text{D'où } \mathbb{E} \left[\left(\frac{C_n}{H_n} - 1 \right)^2 \right] = \text{Var} \left(\frac{C_n}{H_n} \right) \leq \frac{1}{H_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \text{ Puisque } H_n \sim \ln(n), \text{ on a la convergence souhaitée.}$$

2. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P} \left(\left| \frac{C_n}{H_n} - 1 \right| > \epsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(C_n)}{H_n^2 \epsilon^2} \leq \frac{1}{H_n \epsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

3. (a) Montrons la convergence pour la suite extraite $(C_{2^{n^2}})_{n \geq 0}$.
Toujours par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \epsilon > 0, \forall n \geq 0$,
 $\mathbb{P} \left(\left| \frac{C_{2^{n^2}}}{H_{2^{n^2}}} - 1 \right| > \epsilon \right) \leq \frac{1}{H_{2^{n^2}}} \sim \frac{1}{n^2 \ln(2) \epsilon^2}$. Donc $\forall \epsilon > 0, \sum_{n \geq 0} \mathbb{P} \left(\left| \frac{C_{2^{n^2}}}{H_{2^{n^2}}} - 1 \right| > \epsilon \right) < \infty$, donc par un lemme de Borel-Cantelli, $\frac{C_{2^{n^2}}}{H_{2^{n^2}}} - 1 \rightarrow 0$ p.s..

- (b) Revenons à la convergence de la suite de base : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On encadre par deux termes consécutifs $2^{k^2} \leq n < 2^{(k+1)^2}$.

Puisque les suites C et H sont croissantes p.s., on encadre $\frac{H_{2k^2}}{H_{2k^2}} \times \frac{C_{2k^2}}{H_{2(k+1)^2}} \leq \frac{C_n}{H_n} \leq \frac{C_{2(k+1)^2}}{H_{2k^2}} \times \frac{H_{2(k+1)^2}}{H_{2(k+1)^2}}$.

Or $\frac{H_{2(k+1)^2}}{H_{2k^2}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$ (et $k \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$). Donc finalement, par encadrement, $\frac{C_n}{H_n} \rightarrow 1$ p.s..

4. Notons $Y_n = \frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}$. Montrons que $\varphi_{Y_n} \rightarrow \varphi_{N(0,1)}$ simplement. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Posons $x_n = e^{i \frac{\xi}{\sqrt{\ln(n)}}}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(\xi) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \frac{\xi}{\sqrt{\ln(n)}} \sum_{k=1}^n 1_{U_k=k} \right) \right] e^{-i\xi \sqrt{\ln(n)}} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} x_n \right) e^{-i\xi \sqrt{\ln(n)}} \text{ par indépendance des } U_k \\ &= \exp \left[\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} (x_n - 1) \right) \right] e^{-i\xi \sqrt{\ln(n)}} \text{ pour } n \text{ assez grand} \\ &= \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (x_n - 1) + \frac{1}{k^2} (x_n - 1)^2 \epsilon \left(\frac{x_n - 1}{k} \right) \right] e^{-i\xi \sqrt{\ln(n)}} \\ &= \exp \left[(\ln(n) + O(1)) \left(i \frac{\xi}{\sqrt{\ln(n)}} - \frac{\xi^2}{\ln(n)} + o \left(\frac{1}{\ln(n)} \right) \right) \right] \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \epsilon \left(\frac{x_n - 1}{k} \right) \times (x_n - 1)^2 \right] e^{-i\xi \sqrt{\ln(n)}}. \end{aligned}$$

Le premier terme fois le dernier tend vers $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, le deuxième vers 1 car ce qui est dans l'exponentielle est le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0. Donc $\varphi_{Y_n}(\xi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

D'après le *théorème de Lévy*, $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, 1)$.

□

Remarque 1. Pour la convergence en loi, on pourrait utiliser le théorème de Lindeberg (La condition de Lindeberg, lorsqu'elle est vérifiée par une suite de variables aléatoires, assure la convergence en loi d'une certaine quantité vers la loi normale centrée réduite. Le TCL est un cas particulier de ce résultat.).

Remarque 2. Si on regarde une suite $(\tilde{S}_n)_{n \geq 1}$ de permutations aléatoires indépendantes, uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors les convergences L^2 , en probabilités et en loi ont toujours lieu, mais pas la convergence presque sûre. L'algorithme de Fisher-Yates-Knuth (aussi appelé processus des restaurants chinois) présenté dans le premier lemme permet ici :

- de simuler une permutation aléatoire uniforme avec une complexité bien moindre (au lieu de simuler une variable uniforme sur $\llbracket 1, n! \rrbracket$).
- de montrer des résultats de convergences sur le nombre de cycles de permutations aléatoires (éventuellement indépendantes).

Pour les développements, je vous conseille de réorganiser et de présenter : le lemme 1 + la convergence p.s. ou le lemme 1 + la convergence en loi. Adaptez en fonction de la vitesse à laquelle vous allez et de la leçon. Enfin, il est important que vous sachiez prouver les résultats qu'on utilise ici (le théorème de Lévy, le deuxième lemme, pourquoi le lemme de Borel-Cantelli conclut bien la convergence presque sûre,...).

Leçons pour lesquelles c'est un (très) bon développement selon moi :

- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications. (*insister sur l'algorithme pour générer des permutations aléatoires*)
- 261 Loi d'une variable aléatoire: caractérisations, exemples, applications. (*ne pas parler de convergence p.s. mais plutôt de convergence en loi*)
- 262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications. (*cet exemple illustre les différents modes de convergences de variables aléatoires*)
- 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

- 266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Vous pouvez également aborder ces résultats dans les leçons 190 (le rapport du jury en parle, il y a plein de propriétés intéressantes sur les permutations aléatoires en plus du nombre de cycles), 224 (on fait des DL dans la preuve de la convergence en loi), 250 (utilisation de la fonction caractéristique dans le thm de Lévy, ici on a une application).

Attention, il peut y avoir des erreurs ! N'hésitez pas à me les signaler par mail ([chloe.boisson\[at\]ens-lyon.fr](mailto:chloe.boisson@ens-lyon.fr)). Malheureusement, je n'ai pas de référence complète pour ce développement.