Leçon 102 : Nb complexe de module 1. Racines de l'unité et applications

I. Le groupe $\mathbb{U}$

a) Définitions

[ARN] p.226

Def. 1: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Prop. 2: $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$, $z \mapsto |z|$ est morphisme de groupe multiplicatif.
Son noyau est $\mathbb{U}$

Thm. 3: $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}^*$, $(r, u) \mapsto ru$ est un isomorphisme de groupe

Thm 4: $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (Re(z), Im(z))$ est une bijection.
De plus $\varphi(\mathbb{U}) = S^1$ où S^1 est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

b) exponentielle et trigonométrie

[ARN] p.226-228.

Def. 5: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ on note $E_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ix}$ et $E : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $x \mapsto e^{ix}$

Thm. 6: E est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$.
$\ker(E) = 2\pi\mathbb{Z}$ où π est défini comme le double du plus petit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tq $Re(E(\alpha)) = 0$

Def. 7: $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto Re(E(x))$ et $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto Im(E(x))$

Prop. 8: • $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
- Formule de Moivre : $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ $[a, a+2\pi[\to \mathbb{U}$, $x \mapsto e^{ix}$ est bijective
- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Ex. 9: $S_n = \sum (e^{i\theta})^k = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ (Noyau de Dirichlet)

c) Arguments

[ARN] p.232-234

Def. 10: $z \in \mathbb{C}^*$ on appelle argument z, $\theta \in \mathbb{R}$ tq $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.
On note $\arg(z)$ l'ensemble des arguments de z

Rmq 11: $z \in \mathbb{C}^*$ $\arg(z) \neq \emptyset$ si $\theta_0 \in \arg(z)$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in \arg(z)$ ssi $e^{i\theta} = e^{i\theta_0}$ ssi $e^{i(\theta - \theta_0)} = 1$

Thm. 12: $z \in \mathbb{C}^*$ $\arg(z) \neq \emptyset$ et $\forall \theta_0 \in \arg(z)$, $\arg(z) = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Def. 13: $z \in \mathbb{C}^*$ on appelle forme trigonométrique de z le couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tq $z = re^{i\theta}$.

Def. 14: On appelle argument principal $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et on note $Arg(z)$ l'unique élément de $\arg(z) \cap]-\pi, \pi[$

d) Angles orientés

[ARN] p.23[illegible]

Soit P le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $R = \{0, e_1, e_2\}$. Pour $x + iy \in \mathbb{C}$ on identifie ce point dans P par : $0 + xe_1 + ye_2$

Def. 15: On note $\Omega_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a^2 + b^2 = 1 \right\}$

Thm. 16: $M : \mathbb{U} \to \Omega_2^+(\mathbb{R})$, $c + id \mapsto \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupe.

Def. 17: On note $SO(\mathbb{C})$ le groupe des rotations vectorielles du plan d'Argand-Cauchy.

Prop. 18: $\rho : \Omega_2^+(\mathbb{R}) \to SO(\mathbb{C})$ tel que pour $R = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in \Omega_2^+(\mathbb{R})$ $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on a

$\rho(R)(z) = cx - sy + i(sx+cy)$ est un isomorphisme de groupe.

Thm 19 : $\forall u \in \mathbb{U}$, notons $\rho_u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto uz$. Alors $\mathbb{U} \to SO(\mathbb{C})$, $u \mapsto \rho_u$ est un isomorphisme de groupe.

[ARU] p.239-242

Rmq : Avec cette interprétation i correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$, i^2 à une rotation de π

Def. 20 : On appelle angle orientée d'une rotation vectorielle ρ toute détermination de l'argument de $u \in \mathbb{U}$ tq $\rho = \rho_u$

Rmq. 21 : Avec l'identification des rotations vectorielles du plan et des éléments de $\mathbb{U}$, on a que $\forall u, v \in \mathbb{C}$, $\exists! \rho \in SO(\mathbb{C})$ tq $v = \rho(u)$.

Def. 22 : $z, t \in \mathbb{C}^*$. On appelle angle orienté de z et t tout angle de l'unique rotation vectorielle ρ qui envoie $u = \frac{z}{|z|}$ sur $v = \frac{t}{|t|}$

Thm. 23 : (Chasles) $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, θ_k angle orienté de z_{k-1} et de z_k ($k \in \{1, \dots, n\}$). Alors $\theta_1 + \dots + \theta_n$ est un angle orienté de z_0 et z_n.

II Racines de l'unité

a) Définitions et premières propriétés $n \geq 2$

Def. 24 : $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est appelé groupe des racines n-èmes de l'unité.

Rmq. 25 : $\mu_n = \ker(f_n)$ où $f_n : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $z \mapsto z^n$ donc μ_n est un sous groupe de $\mathbb{U}$

Thm. 26 μ_n est cyclique. Ses générateurs sont les $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $\operatorname{pgcd}(k,n) = 1$.

[ARU] p.234-236

Def. 27 : On appelle racine n-ème primitive de l'unité tout générateur de μ_n. On note μ_n^* l'ensemble de ces éléments.

Prop. 28 : $|\mu_n^*| = \varphi(n)$ (φ indicatrice d'Euler)

Ex. 29 : $\mu_2^* = \{-1\}$, $\mu_3^* = \{j, j^2\}$, $\mu_4^* = \{i, -i\}$, $\mu_5^* = \mu_5 \setminus \{1\}$, $\mu_6^* = \{-j, -j^2\}$ ...

Prop. 30 : Le seul sous groupe fini de card. n de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est μ_n.

Appli. 31 : Image de μ_n dans le plan complexe. (cf Annexe 1)

Prop. 32 : $\mu_n = \bigsqcup_{d|n} \mu_d^*$

Cor. 33 : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

[PER] p.80-81

b) Polynômes cyclotomiques : $n \in \mathbb{N}^*$

Def. 34 : On définit le n-ème pol. cyclo $\Phi_n = \prod_{\xi \in \mu_n^*} X - \xi$

Prop. 35 : $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$

Prop. 36 : Φ_n est unitaire de deg $\varphi(n)$

Rmq. 37 : $\Phi_n(X) = \frac{X^n - 1}{\prod_{d|n} \Phi_d(X)}$

Ex. 38 : $\Phi_3 = X^2 + X + 1$, $\Phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

Prop. 39 : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

[PER] p.80-83

[PER] p.83 DEV1

Thm 40 : Φ_n est irr. sur $\mathbb{Z}[X]$

Cor. 41 : $\xi \in \mu_n^*$ le pol. min de ξ sur $\mathbb{Q}$ est Φ_n et $[\mathbb{Q}(\xi) ; \mathbb{Q}] = \varphi(n)$

Thm 42 : Tout corps fini est commutatif

IV. Application : construction à la règle et au compas

a) Corps des nombres constructibles

[CAR] p.14 - 16

Def. 43 : Soit $B \subset \mathbb{R}^2$ ayant au moins 2 éléments et B fini. Les éléments de B sont appellés points de base. Un point $M \in \mathbb{R}^2$ est constructible à partir de B si il existe une suite finie de points de $\mathbb{R}^2$ finissant par M : $M_1, \dots, M_n = M$ tq $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ M_i est soit :

- le point d'intersection de 2 droites
- — — d'une droite et d'un cercle
- — — de 2 cercles

Ces droites et cercles étant obtenus à l'aide de $E_i = B \cup \{M_1, \dots, M_{i-1}\}$ où :

- chaque droite passe par 2 points distincts de E_i
- Chaque cercle est centré en un point de E_i et a pour rayon la distance entre 2 points de E_i

Rmq. 44 : On prendra $B = \{(0,0), (1,0)\}$

Def. 45 : Un réel est dit constructible si c'est une des coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^2$ constructible.

[CAR] p.19

Thm 46 : L'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres constructibles est un sous corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Thm 47 : (Wantzel) $t \in \mathbb{R}$ est constructible ssi $\exists p \geq 1$ et $L_1, \dots, L_p$ des sous corps de $\mathbb{R}$ tq :

- $L_1 = \mathbb{Q}$
- $\forall j \in \{1, \dots, p-1\}$, $L_j \subset L_{j+1}$ et $[L_{j+1} : L_j] = 2$
- $t \in L_p$

Cor. 48 : Tout nombre constructible est algébrique de degré 2

Ex. 49 : Duplicat° du cube impossible car $\sqrt[3]{2} \in \mathcal{C}$ car $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.

c) Constructibilité des polygones

Comme 125 à voir quand le dev sera rédigé