THÉORÈME DE FEJER L^p.

Théorème : Soit $(\rho_n)_n$ une approximation de l'identité. Soit $p \in [1,+\infty[$. Alors, $\forall f \in L^p_{2\pi}$,

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Preuve :

On commence par mq. $\forall p \in [1,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|(\rho_n * f - f)(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y)\,|f(x-y)-f(x)|^p\,dy.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $p \in [1,+\infty[$.

$$|\rho_n * f(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)f(x-y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)f(x)\,dy\right| \quad \text{car } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)\,dy = 1$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)^{\frac{1}{p}}\cdot\rho_n(y)^{\frac{1}{q}}\,|f(x-y)-f(x)|\,dy \quad \text{inégalité triangulaire}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)|f(x-y)-f(x)|^p\,dy\right)^{1/p}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)\,dy\right)^{1/q}}_{=1} \quad \text{inégalité de Hölder.}$$

En passant à la puissance p, on a l'inégalité voulue.

On écrit ensuite :

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(\rho_n * f - f)(x)|^p\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)\,|f(x-y)-f(x)|^p\,dy\right)dx \quad \text{par ce qui précède}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)\,|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)dy \quad \text{par le thm de Fubini-Tonelli}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(y)\,\|\tau_y f - f\|_{L^p}^p\,dy.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des translations, on a,

$$\exists \eta > 0 \text{ tq. si } |y| \leq \eta \text{ alors, } \|\tau_y f - f\|_{L^p}^p \leq \varepsilon \quad (1)$$

Puis, par propriété des approximations de l'identité,

$$\exists N \geq 0 \text{ tq. } \forall n \geq 0,\ \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\eta,\eta]}\rho_n(y)\,dy \leq \varepsilon \quad (2)$$

Enfin, comme $\forall y \in \mathbb{R}$, $\|f\|_{L^p} = \|\tau_y f\|_{L^p}$, on a que $\|\tau_y f - f\|_{L^p}^p \leq (2\|f\|_{L^p})^p$. (3)

Donc :

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\rho_n(y)\,\|\tau_y f - f\|_{L^p}^p\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\eta,\eta]}\rho_n(y)\|\tau_y f - f\|_{L^p}^p\,dy$$

$$\leq \underbrace{\varepsilon\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\rho_n(y)\,dy\right)}_{\text{par (1)}} + \underbrace{(2\|f\|_{L^p})^p\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\eta,\eta]}\rho_n(y)\,dy\right)}_{\text{par (3)}}$$

$$\leq \varepsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\rho_n(y)\,dy + 2\|f\|_{L^p}^p\right) \quad \text{par (2).}$$

$$\leq \varepsilon\left(1 + 2\|f\|_{L^p}^p\right).$$

d'où le résultat.

Application (thm de Fejér): Toute fonction de $L^p_{2\pi}$ est limite d'une suite de polynômes trigonométriques.

Preuve: Soit $n \geq 1$, on pose $K_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} = \begin{cases} \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$(K_n)_n$ est la suite des noyaux de Fejér, que l'on définit ici sur $[-\pi, \pi]$.

On mq. $(K_n)_n$ est une approximation de l'identité.

- $\forall x \neq 0$, $\forall n \geq 1$ $K_n(x) \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$
- Soit $\alpha \in]0,\pi[$, alors $\forall t \in I := [-\pi, -\pi+\alpha] \cup [\pi-\alpha, \pi]$, $K_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2$

Sur le compact I, $\exists m \in \mathbb{R}$ tq. $\forall t \in I$,

$$K_n(t) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$$

car $t \in I \mapsto \frac{1}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}$ est continue sur I. Donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_I K_n(t)\,dt \leq \frac{1}{2\pi m \cdot n} \cdot \lambda(I) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc, $(K_n)_n$ est une approximation de l'identité, donc par le thm précédent, $\forall f \in L^p_{2\pi}$, $K_n * f \xrightarrow{L^p} f$. Or,

$$K_n * f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k * f \quad \text{où } D_k \text{ est le noyau de Dirichlet}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k \quad \text{où } S_k \text{ est la série de Fourier de } f \text{ partielle.}$$

Donc, $K_n * f$ est un polynôme trigonométrique, d'où le résultat.

Remarques:

▷ Développement d'intégration que je trouve superbe. Il est un peu technique, ce qui le rend de très bon niveau, mais il reste très accessible.
Il est beaucoup plus simple de se mettre sur $[-\pi, \pi]$ que sur $[0, 2\pi]$.

▷ La continuité des translations est centrale, il faut savoir le montrer. C'est un argument de densité, qui est un bon exercice.

▷ Une preuve semblable peut être faite pour montrer le thm de Fejér uniforme, mais elle est un peu plus simple, et un peu plus courte.

▷ Comme on est dans le cas 2π-périodique, le produit de convolution est bien

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,dy$$

quand $f * g$ est défini.

▷ J'admets l'égalité des deux expressions de K_n; c'est long et calculatoire à faire, mais il faut savoir le faire pour présenter ce développement je pense.