# EQUATION DE VAN DER POL

**Objectif.** On étudie qualitativement les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'' + (3x^2-1)x' + x = 0.$$

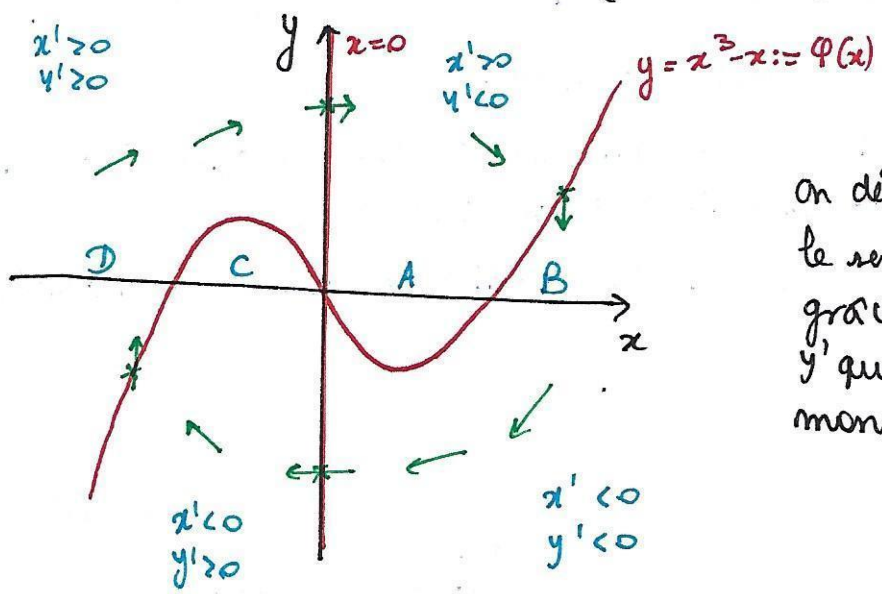
**Reformulation vectorielle.** Cette étape est un peu plus exotique que d'habitude.
Si $x$ est solution de $(E)$, alors, $x'' = -3x^2x' + x' - x$. En posant $y' = -x$, il vient en primitivant : $x' = -x^3 + x + y$. Donc, en posant $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \mapsto (b-a^3+a, -a) \end{array}$ on trouve :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on vérifie que ce système est bien équivalent $(E)$.

**Plan de phase.** Les isoclines sont données par :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 + x = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 - x \\ x = 0 \end{cases}$$




On détermine facilement le sens des flèches grâce au signe de $x'$ et $y'$ qui détermine la monotonie de $x$ et $y$.

**Existence des solutions** On fixe les conditions $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Comme $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, le thm de Cauchy-Lipschitz local donne l'existence et l'unicité de la solution maximale au problème de Cauchy. On va mq. cette solution est globale.
Supposons que la solution est définie sur $[0, T[$, $T < +\infty$. La "bonne" quantité à considérer est la norme au carré de la solution ; on pose pour $(x,y)$ un couple solution, $W(x,y) := x^2 + y^2$. On calcule :

$$\frac{d}{dt} W(x,y) = 2xx' + 2yy' = 2x^2(1-x^2) \leq 2x^2 \leq W(x,y)$$

Le lemme de Gronwall donne alors $W(x(t), y(t)) \leq W(x_0, y_0) e^{2t}$. Donc

$$x^2(t) + y^2(t) \leq (x_0^2 + y_0^2) e^{2T} \quad \forall t \in [0, T[.$$

Ceci est une contradiction avec le principe d'explosion en temps fini, qui donnerait $\|(x(t), y(t))\|^2 \xrightarrow[t \to T]{} +\infty$ si $T < +\infty$.

**Comportement de la solution :** Supposons $(x_0, y_0) \in A$. On va mq., comme le dessin le suggère, la solution va rentrer dans la zone $B$. Soit $\tau_1$ le temps maximal pour lequel la solution est dans $A$. $\forall t \in [0, \tau_1[$, on a $x'(t) > 0$ et $y'(t) < 0$. Donc par monotonie, $\varphi(x(t)) = y(t) - x'(t) \leq y(t) \leq y_0$. Or, $\varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Donc, si $\varphi \circ x$ est borné $x$ l'est aussi. Posons $|x(t)| \leq m_1$, $\forall t \geq 0$. Dans cette zone $A$, $\varphi$ est minorée, disons par $m_2$. Donc $\forall t \in [0, \tau_1[$,

$$(x(t), y(t)) \in K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq. } x_0 \leq x \leq m_1,\ m_2 \leq y \leq y_0\}.$$

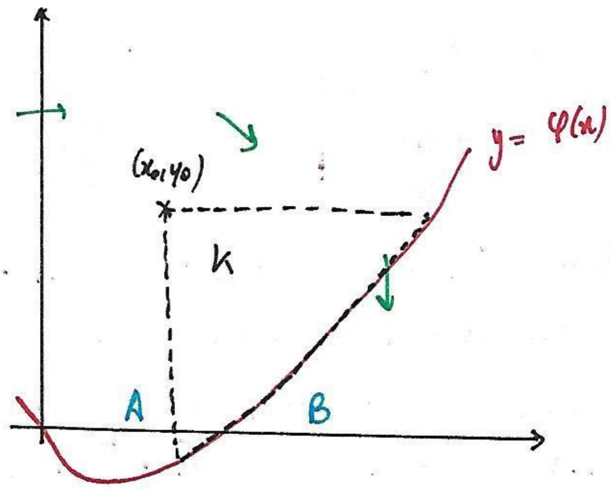
$K$ est compact. Si $\tau_1 = +\infty$, par cv monotone, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(x(t), y(t)) \longrightarrow (a,b)$. Mais ce point doit être stationnaire pour ce système, donc $(a,b) = (0,0) \in K$, impossible. Donc $\tau_1 < +\infty$ et la solution passe dans $B$ □.

**Remarques:**

▷ On peut montrer aussi que la solution passe dans $C$ puis $D$ puis $A$ à nouveau etc. Mais la preuve est bien différente, hors de question de balancer à l'oral un "on montre de la même façon que ...".

▷ Le Berthelin fait les choses bien mais dans un ordre bizarre... La preuve de la globalité de la solution y arrive très tard.

▷ La dernière partie de la solution se comprend magnifiquement bien sur un dessin.




La monotonie contraint la solution à rester dans la zone $K$ si la solution ne passe pas dans $B$. C'est le même $K$ que dans la preuve. Dans ce cas, la solution convergerait dans $K$, et le point stationnaire est $(0,0)$. On "voit" bien que c'est impossible.