FORMULE D'INVERSION DE FOURIER (L^1).

Théorème: Soit $f\in L^1$ tq. $\hat{f}\in L^1$. Alors pp $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi$$

Preuve:

(1) On commence par calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne. On pose $G:x\in\mathbb{R}\mapsto e^{-\pi x^2}$.

On a que G est continue sur $\mathbb{R}$ et $G(x)=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $\pm\infty$. Donc $G\in L^1(\mathbb{R})$. De plus, en posant $g:(\xi,x)\in\mathbb{R}^2\mapsto e^{-\pi x^2}e^{-2i\pi\xi x}$, on a:

* $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $x\mapsto g(\xi,x)$ est mesurable car continue
* $\forall x\in\mathbb{R}$, $\xi\mapsto g(\xi,x)$ est C^1 et $\frac{\partial}{\partial\xi}g(\xi,x)=-2i\pi x g(\xi,x)$.
* $\forall\xi,x\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}g(\xi,x)\right|=2\pi|x|\cdot|g(\xi,x)|=2\pi|x|\cdot e^{-\pi x^2}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $x\mapsto 2\pi x e^{-\pi x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le thm de dérivation sous l'intégrale, $\hat{G}$ est C^1 et $\forall\xi\in\mathbb{R}$,

$$\hat{G}'(\xi)=i\int_{\mathbb{R}}-2\pi x e^{-\pi x^2}e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$$

$$\text{IPP}\longrightarrow=i\left(\left[e^{-\pi x^2}e^{-2i\pi x\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty}+2i\pi\xi\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}e^{-2i\pi x\xi}\,dx\right)$$

$$=-2\pi\xi\hat{G}(\xi)$$

Donc, avec $G(0)=1$, on trouve que $\hat{G}(\xi)=e^{-\pi\xi^2}=G(\xi)$.

(2) Construction d'une approximation de l'identité:

On pose $\forall n\geq 0$, $G_n:t\in\mathbb{R}\mapsto G\left(\frac{t}{n}\right)$. Alors, $\hat{G}_n(\xi)=n\hat{G}(n\xi)=nG(n\xi)$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$.

Ainsi, comme $\int_{\mathbb{R}}G(t)\,dt=1$, $(nG(n\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $(\hat{G}_n)_n$ est une suite d'approximation de l'identité.

(3) On démontre la formule d'inversion. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ tq. $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. On pose $\forall n\geq 1$, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n:t\in\mathbb{R}\mapsto\hat{f}(t)e^{2i\pi xt}G_n(t).$$

On a $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\hat{f}(t)e^{2i\pi xt}$ et $\forall n\geq 1$, $|f_n(t)|\leq|\hat{f}(t)|$ avec $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. Donc par convergence dominée, $\int_{\mathbb{R}}f_n(t)\,dt\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(t)e^{2i\pi xt}\,dt$.

En outre, on va montrer que $\int_{\mathbb{R}}f_n(t)\,dt\longrightarrow f(x)$ (au presque...) et on conclura par unicité de la limite.

On calcule pour $n\geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}}f_n(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(t)e^{2i\pi xt}G_n(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(u)e^{-2i\pi tu}\,du\right)e^{2i\pi xt}G_n(t)\,dt$$

On pose $h:(u,t)\in\mathbb{R}^2\mapsto f(u)G_n(t)e^{-2i\pi t(u-x)}$. Alors, par le thm de Fubini-Tonelli, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2}|h(u,t)|\,du\,dt=\int_{\mathbb{R}}|f(u)|\,du\cdot\int_{\mathbb{R}}G_n(t)\,dt<+\infty.$$

Donc le thm de Fubini-Lebesgue s'applique et:

$$\int_{\mathbb{R}}f_n(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}f(u)\int_{\mathbb{R}}G_n(t)e^{-2i\pi t(u-x)}\,dt\,du=\int_{\mathbb{R}}f(u)\hat{G}_n(x-u)\,du=f*\hat{G}_n(x).$$

Donc, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * G_n \xrightarrow{L^1} f$, donc il existe une extraction $(n_k)_k$ tq. $pp\ x \in \mathbb{R}$, $f * G_n(x) \longrightarrow f(x)$. Par unicité de la limite de la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_{n_k}(t)dt\right)_k$ on a le résultat.

Remarques:

▷ Developpement sympa, mais assez calculatoire, il faut faire attention au temps. Il fait revoir beaucoup de points d'intégration, c'est un bon exercice.

▷ J'ai utilisé la convention $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi t \xi} dt$ pour la transformée de Fourier.

▷ Une fois que l'on a ce resultat, une application directe du thm de continuité sous l'intégrale montre que f est continue. Ainsi, la formule d'inversion, vraie a priori presque partout devient vraie partout. Mais c'est bien un bonus obtenu a posteriori.

▷ Mon IPP dans le (1) est un peu "sauvage", normalement il faudrait passer par les compacts et après passer à la limite sur les bornes de l'intégrale... Mais bon...