Étude de la fonction Gamma

Rombaldi
Analyse réelle

Recasages : 228, 239, 236, 244

Proposition : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. La fonction Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Preuve : $\forall x > 0$, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0;+\infty[$

- $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$ intégrable au voisinage de 0 et $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable au voisinage de $+\infty$ donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$
- Soit $f : (x,t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$, f est donc intégrable et $\forall t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, soit $a < b$ tels que $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in [a;b]$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln(t)|^k t^{x-1} e^{-t} \leq g_k(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

g_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par théorème, Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$

- $\ln(\Gamma)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln(\Gamma))'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$. Or, par Cauchy-Schwarz, pour tout $x > 0$,

$$(\Gamma'(x))^2 = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt\right)^2$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma''\Gamma$$

Donc $(\ln(\Gamma))'' \geq 0$ donc Γ est log-convexe (donc convexe).

- Une intégration par parties donne : $\forall x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} t^{x} e^{-t} dt = \left[-t^{x} e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

Donc $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Lemme (Euler) : On a $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\, n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

Preuve : Soit $x>0$ fixé, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t>0$,

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in \,]0;n[\\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

Chaque f_n est continue et intégrable sur $]0;+\infty[$ avec :

$$\forall t \in\,]0;+\infty[, \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t} t^{x-1} \\ \forall n \geq 1, \ |f_n(t)| \leq f(t) = e^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

Comme f est intégrable et continue sur $]0;+\infty[$, le **TCD** donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = \Gamma(x)$$

D'autre part, on a :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt \overset{u=\frac{t}{n}}{=} \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} n^x\, dx = n^x J_n(x)$$

Une intégration par parties donne :

$$J_{n+1}(x) = \int_0^1 (1-t)^{n+1} t^{x-1}\, dt = \frac{n+1}{x} \int_0^1 (1-t)^n t^x\, dt = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

et par récurrence :

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} J_0(x+n)$$

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \int_0^1 t^{x+n-1}\, dt = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

Ainsi, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$