Simon Allais

Leçon 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographie.

Réf : Boyer, Algèbre et géométrie
Caldero, Germoni, H2G2 tome 1
Needham, Visual Complex Analysis

I Applications des complexes à la géométrie affine

1) Structure euclidienne de $\mathbb{C}$

Prop 1 : $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) \mapsto \mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) \end{cases}$ définit un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ tel que $(1, i)$ soit une base orthonormée de norme associée $|\cdot|$. Par convention, $(1, i)$ est directe.

Prop 2 : $\rho : \begin{cases} \mathbb{C}^\times \to \mathrm{Sim}^+(\mathbb{R}^2) \\ a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme de groupe donnant une représentation réelle de $\mathbb{C}^\times$ compatible avec l'isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ dans le sens où $\rho(z)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi(z(x+iy))$.

Application 3 (Formule de Cauchy-Riemann) : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\exists a \in \mathbb{C}\ \forall z \in \mathbb{C}\ f(z+z_0) = f(z_0) + az + o(|z|) \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$.

Prop 4 : En remarquant que $\det \rho(z) = |z|^2$, on a de plus $\mathbb{U} \xrightarrow{\sim} O^+(\mathbb{R}^2)$. La mesure d'angle orienté de $\mathbb{R}^2$ $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ coïncide alors avec l'argument de $z \in \mathbb{U}$ antécédent de l'isomorphisme $\begin{cases} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{U} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$.

Def 5 : On rappelle que l'argument de $z \in \mathbb{C}^\times$ désigne indifféremment $z/|z| \in \mathbb{U}$ ou son antécédent $\overline{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par l'isomorphisme précédent, son argument principal est le représentant de $\overline{\theta}$ dans $]-\pi ; \pi]$ noté $\arg \overline{\theta}$.

2) Application à la géométrie euclidienne

On identifiera tout plan affine à $\mathbb{C}$ muni du repère $(0 ; 1, i)$ de direction identifiée aussi à $\mathbb{C}$ par son action naturelle sur lui-même. Ainsi $\vec{ab} = b - a \in \mathbb{C}$.

Prop 6 : L'angle orienté $(\vec{ab}, \vec{cd}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$ $[2\pi]$.

App 7 (angle au centre - angle au sommet) : Si $A, B, C \in$ cercle de centre O, alors $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB})$ (figure 1)

App 8 (triangle équilatéral) : abc est équilatéral ssi une des conditions équivalentes est remplie :
* $az^2 + bz + c = 0$ pour $z = j$ ou $z = j^2$
* $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$
* $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$

Prop 9 : Les fonctions holomorphes sont conformes (i.e. préservent les angles orientés) hors de leurs points critiques

App 10 : Une ellipse est orthogonale à (i.e. intersecte orthogonalement) toute hyperbole lui étant homofocale (figure 2)

3) Application à la géométrie affine

Prop 11 : Le barycentre des points pondérés $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$ est $\frac{1}{\Sigma \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ si $\Sigma \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$

Prop 12 : $s : z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie d'axe $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Prop 13 : Toute application affine s'écrit $z \mapsto az + b\overline{z} + c$ pour $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Prop 14 : La droite passant par $z_1 \neq z_2$ est donnée par $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z} \end{vmatrix} = 0$

L'équation du cercle passant par z_1, z_2 et z_3 distincts est :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} & \overline{z} \\ z_1\overline{z_1} & z_2\overline{z_2} & z_3\overline{z_3} & z\overline{z} \end{vmatrix} = 0.$$
Pour la conique, on ajoute 2 points et 2 lignes : z_i^2 et $\overline{z_i}^2$.

Prop 15 (Gauss-Lucas) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P.

Prop 16 : En notant $\mathrm{rac}(P)$ les racines de $P \in \mathbb{C}[X]$ comptées avec multiplicité,
$\forall g \in \mathrm{Sim}(\mathbb{C}),\ \mathrm{rac}(P \circ g^{-1}) = g \cdot \mathrm{rac}(P) \Rightarrow \mathrm{rac}(P' \circ g^{-1}) = g \cdot \mathrm{rac}(P')$.

Prop 17 (Ellipse de Steiner) : Il existe une unique ellipse $\mathcal{E}_T$ associée à T triangle dont le rapport d'aire avec T est maximal avec $\mathcal{E}_T$ intérieure à T. $\mathcal{E}_T$ est tangente au centre de chaque arête de T et le rapport vaut $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$. (figure 3)

Thm 19 (Marden - Van der Berg) : Si $T = abc$ et $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ les racines de P' sont les foyers de $\mathcal{E}_T$. **DVT 1**

Lemme 18 : Toute application affine de $\mathbb{C}$ peut s'écrire $s a_\alpha r$ où $r(z) = e^{i\theta} z$, $a_\alpha(x+iy) = x + iy e^{\alpha}$ et $s(z) = cz + d$ où $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{C}$.

4) Une application à la géométrie dans l'espace : les quaternions

Def 20 : $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}, z, w \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des quaternions.
On note $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ de sorte que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, engendrée par $\langle 1, I, J, K \rangle$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
$\mathbb{H}^{im} := \langle I, J, K \rangle$ les imaginaires purs, identifiés à $\mathbb{R}^3$ via $\varphi : (x,y,z) \mapsto xI + yJ + zK$
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^3$, on note $x1 + \varphi(v)$ simplement $x + \vec{v}$.

Prop 21 : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}^{im}$
$(x + \vec{u})(y + \vec{v}) = xy - (\vec{u} | \vec{v}) + x\vec{v} + y\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v}$

Def 22 : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\overline{x + \vec{u}} := x - \vec{u}$, $\|x + \vec{u}\| := (x+\vec{u})\overline{(x+\vec{u})} = x^2 + \|\vec{u}\|^2$
$\mathbb{U}_{\mathbb{H}} = \{ u \in \mathbb{H} \text{ tq } \|u\| = 1 \} \simeq SU_2(\mathbb{C})$.

Prop 23 : $\forall u \in \mathbb{U}_{\mathbb{H}}$, $\Phi_u : x \mapsto u x \overline{u}$ est un automorphisme de $\mathbb{H}^{im} \simeq \mathbb{R}^3$
Pour $u = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{v}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ unitaire, Φ_u est la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ selon le vecteur $\vec{v}$.

De plus le morphisme $u \mapsto \Phi_u$ a pour noyau ± 1 d'où l'isomorphisme de groupe $(SO_3(\mathbb{R}) =) O_3^+(\mathbb{R}) \simeq \frac{SU_2(\mathbb{C})}{\pm I_2} =: PSU_2(\mathbb{C})$

App 24 : Calcul de composée de rotation

Pour composer la rotation d'angle θ portée par $\vec{u}$ et celle d'angle φ portée par $\vec{v}$, on calcule le produit $(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{u}) \cdot (\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{v}) = a$. Φ_a réalise cette application.

II Étude et application en géométrie de la droite projective complexe

1) $\mathbb{CP}^1$ et le compactifié de $\mathbb{C}$: $\hat{\mathbb{C}}$

Déf 25 : On définit la droite projective complexe $\mathbb{CP}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^\times}$ où $\mathbb{C}^\times$ agit comme les scalaires de $\mathbb{C}^2$. On note $(\xi_1 : \xi_2)$ l'image de $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ par le quotient précédent.

Déf 26 : Tout endomorphisme $g \in GL_2(\mathbb{C})$ passe au quotient en une bijection $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$. On appelle homographie ces applications, ce sont les morphismes de $\mathbb{CP}^1$, ensemble noté $PGL_2(\mathbb{C}) \simeq \frac{GL_2(\mathbb{C})}{\mathbb{C}^* I_2}$ ou encore $PSL_2(\mathbb{C}) \simeq \frac{SL_2(\mathbb{C})}{\pm I_2} \simeq \frac{GL_2(\mathbb{C})}{\mathbb{C}^* I_2} = PGL_2(\mathbb{C})$.

Prop 27 : Les homographies sont exactement 3-transitives.

Déf 28 : On identifie $\mathbb{CP}^1$ à $\mathbb{C}$ auquel on ajoute un point noté ∞ via $\phi : \begin{cases} \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (x:y) \mapsto x/y \text{ si } y \neq 0 \\ (x:0) \mapsto \infty \ (\text{où } x \neq 0). \end{cases}$

On impose les conventions $z \cdot \infty = \infty$ pour $z \neq 0$, $\frac{z}{\infty} = 0$ pour $z \neq \infty$, $\frac{\infty}{\infty} = 1$, $\frac{z}{0} = \infty$ pour $z \neq 0$ et $\frac{\infty}{0} = \infty$. On note $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que l'on munit de la topologie de $\mathbb{C}$ à laquelle on ajoute les $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ où K compact de $\mathbb{C}$. $\hat{\mathbb{C}}$ est alors compact (exemple modèle de compactifié d'Alexandrov d'un espace).

Prop 29 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, sa projection sur $PGL_2(\mathbb{C})$ vue sur $\hat{\mathbb{C}}$ est $h_A : \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \\ t \mapsto \frac{at+b}{ct+d} \end{cases}$.

Cor 30 : $\forall A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ $h_A \circ h_B = h_{AB}$; $(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$ et $h_{\lambda A} = h_A$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Déf 31 : On appelle birapport de $(a,b,c,d) \in (\mathbb{CP}^1)^4$, noté $[a,b,c,d]$, l'image de d par l'unique homographie $\begin{cases} a \mapsto \infty \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{cases}$. Explicitement $[a,b,c,d] = \frac{b-d}{a-d} \times \frac{a-c}{b-c} \in \hat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{CP}^1$. ($a,b,c,d$ doivent être 2 à 2 $\neq$)

Prop 32 : $\forall h \in PGL_2(\mathbb{C})$, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{CP}^1$, $[h(a), h(b), h(c), h(d)] = [a,b,c,d]$.

Cor 33 : le birapport est un invariant total de l'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ sur les quadruplets de points $\neq$ 2 à 2.

2) Inversions

Déf 34 : Soit $O \in \mathcal{E}$ espace euclidien, l'inversion géométrique de centre O et de puissance k^2 (on dit aussi inversion par rapport à la sphère $S(O,k)$) est l'application $\mathcal{E} \setminus \{O\} \to \mathcal{E} \setminus \{O\}$ qui à M associe M' tel que $M' \in (OM)$ et $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k^2$ (figure 4), notée I_{O,k^2} ou $I_{S(O,k)}$.

Sur $\mathbb{C}$, pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $I_{z_0,k^2} : z \mapsto z_0 + \frac{k}{\bar{z} - \bar{z}_0}$ et s'étend de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ par $z_0 \mapsto \infty$. C'est une involution.

On appelle $z \mapsto z_0 + \frac{k}{z - z_0}$ l'inversion complexe de centre z_0 et de puissance k^2.

Déf 35 : La puissance de $A \in \mathcal{E}$ par rapport à $S(O,R)$ sphère de rayon R centrée en O est $\mu_{S(O,R)}(A) = AO^2 - R^2$.

Prop 36 : Une sphère S tq $\mu_S(A) = k > 0$ est globalement invariante par $I_{A,k}$.

Prop 37 : I_{O,k^2} stabilise les sous-espaces affines passant par O, envoie les sphères passant par O sur les hyperplans ne passant pas par O et les sphères ne passant pas par O en sphères homothétiques (par rapport à O). De plus I_{O,k^2} préserve les angles (non-orientés).

Prop 38 : $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par $Sim^+(\mathbb{C})$ et $z \mapsto \frac{1}{z}$ (vus sur $\hat{\mathbb{C}}$). De plus les h tq $h(\infty) = \infty$ sont exactement les similitudes directes de $\mathbb{C}$ lorsqu'on les restreint à $\mathbb{C}$.

Cor 39 : $a,b,c,d \in \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ sont cocycliques ou alignés ssi $[a,b,c,d] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (a,b,c,d 2 à 2 $\neq$)

Prop 40 : Si $M' = I_{A,k^2}(M)$ et $N' = I_{A,k^2}(N)$ dans $\mathcal{E}$ euclidien, $M'N' = \frac{k^2 MN}{AM \times AN}$

Cor 41 (Thm de Ptolémée) : Soit ABC triangle de $\mathbb{C}$, $D \in \mathbb{C}$, on a (figure 5)

$$AC \times BD \leq AD \times BC + BA \times CD$$

avec égalité ssi D appartient même cercle que A,B,C et $D \in \widehat{CA \not\ni B}$.

Prop 42 (L'arbelos) : On considère 2 demi-cercles de $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ basés sur $\mathbb{R}$ avec $\mathcal{C}_1$ intérieur à $\mathcal{C}_2$, tangents en O. On peut alors construire une chaîne infinie de cercles tangents à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et successivement tangents de premier cercle orthogonal à $\mathbb{R}$. La hauteur h_n du n-ième cercle est nd_n où d_n est son diamètre ($n=0$ pour le cercle base). (figure 6)

Thm 44 (Alternative de Steiner) : Étant donnés 2 cercles-droites non sécants $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et $T \in \mathcal{C}$, on peut construire une chaîne de cercles successivement tangents et tangents à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de 1er cercle tangent en T. De plus, le cardinal de cette chaîne ne dépend pas du choix de T. (figure 7) DVT 2

Déf 43 : On note $\mathcal{DC} = PGL_2(\mathbb{C}) \cdot \hat{\mathbb{R}}$ l'ensemble des cercles-droites de $\hat{\mathbb{C}}$, où $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$.

Prop 45 (Configuration d'Apollonius) : Étant donnés $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \in \mathcal{DC}$ mutuellement tangents, il existe alors $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5 \in \mathcal{DC}$ tangents à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ (tous les $\mathcal{C}_i$ sont $\neq$) (figure 8)

Déf 46 : Soit $h \in PGL_2(\mathbb{C})$, on nomme $\operatorname{tr}^2 h := (\operatorname{tr} M)^2$ où $M \in SL_2(\mathbb{C})$ est un représentant de h.

Thm 47 (Classification des homographies) : $\forall h \in PGL_2(\mathbb{C})$ h admet un ou deux points fixes notés respectivement ξ ou ξ_- et $\xi_+ \in \hat{\mathbb{C}}$. On lui associe la transformation $F : z \mapsto \frac{1}{z - \xi}$ ou $z \mapsto \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-}$.

1- Si $\operatorname{tr}^2 h \in [0;4[$, h a 2 pts fixes et $F \circ h \circ F^{-1} : z \mapsto e^{i\theta} z$ $(\theta \in \mathbb{R})$ h est dite elliptique

2- Si $\operatorname{tr}^2 h = 4$, h a 1 point fixe, $F \circ h \circ F^{-1} : z \mapsto z + w$ $(w \in \mathbb{C}^\times)$ et h est dite parabolique

3- Si $\operatorname{tr}^2 h \in]4;+\infty[$, h a 2 pts fixes, $F \circ h \circ F^{-1} : z \mapsto \lambda z$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$ et h est dite hyperbolique

4- Sinon, h a 2 points fixes, $F \circ h \circ F^{-1} : z \mapsto \rho z$ $(\rho \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{U} \cup \mathbb{R}))$ et h est dite loxodromique

tr^2 est un invariant total pour l'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ sur lui-même par conjugaison.

App 48 : Étude des suites homographiques

→ tr^2 donne le comportement asymptotique (figure 9) : convergent ssi $\operatorname{tr}^2 \notin [0;4[$

→ $h(z) = z$ donne les points fixes puis $F \circ h \circ F^{-1}$ permet l'étude fine sur une meilleure carte de $\hat{\mathbb{C}}$ où on regarde $h'(\xi)$ ($|\cdot| < 1 \Rightarrow \xi$ attractif).

Ex 49 : $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 4}$ converge vers $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ pour $u_0 \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ (point fixe répulsif).

3) Sphère de Riemann

Déf 50 : Sur $\mathbb{R}^3$ euclidien pour le produit scalaire usuel, on identifie $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ à $\mathbb{C}$ et on note $S^2 = S(0,1)$. Pour $N=(0,0,1)$ et $S=(0,0,-1)$, on note $\varphi_N = I_{N,\sqrt{2}}|_{S^2\setminus N} : S^2\setminus\{N\}\to\mathbb{C}$ la projection stéréographique de pôle N et $\varphi_S = I_{S,\sqrt{2}}|_{S^2\setminus\{S\}}$. On prolonge à $\hat{\mathbb{C}}$ par $N\mapsto\infty$ et $S\mapsto\infty$ respectivement et on note $\tilde{\varphi}$ ces prolongements. (figure 10)

Prop 51 : $\tilde{\varphi}_N : S^2 \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{C}}$ est un homéomorphisme pour la topologie de S^2 induite par l'un $\mathbb{R}^3$ qui envoie les cercles de S^2 sur $\mathcal{DC}$ exactement.

Prop 52 : $\{\varphi_N, \varphi_S\}$ font de S^2 une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^3$; de plus $\forall z\in\mathbb{C}$, $\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Prop 53 : Les points antipodaux de S^2 s'identifie aux couples $z, -\frac{1}{\bar{z}} \in \hat{\mathbb{C}}$ via $\tilde{\varphi}_N$. Les isométries directes de S^2 sont donc les homographies elliptiques de points fixes tq $\xi_+ = -\frac{1}{\bar{\xi}_-}$ et on obtient ainsi une nouvelle réalisation de l'isomorphisme $O_3^+(\mathbb{R})\simeq PSU_2(\mathbb{C})$.

4) Disque et demi-plan de Poincaré

Déf 54 : On note $\mathbb{H}=\{z \mid \operatorname{Im} z>0\}\subset\mathbb{C}$ le demi-plan de Poincaré et $\mathbb{D}=\{z \mid |z|<1\}$ le disque de Poincaré. $z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$ réalise un biholomorphisme $\mathbb{H}\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}$ qui identifie ces deux espaces.

Prop 55 : Les homographies préservant $\mathbb{H}$ sont exactement $PSL_2(\mathbb{R})$. Le biholomorphisme nous donne alors que celles de $\mathbb{D}$ sont $PSU(1,1)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix} \mid |a|^2-|b|^2=1\right\}$ d'où $PSL_2(\mathbb{R})\simeq PSU_{1,1}(\mathbb{C})$.

Prop 56 (Lemme de Schwarz) : Soit $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorphe tq $f(0)=0$ alors $|f'(0)|\le 1$ et si $|f'(0)|=1$, f est une rotation.

Cor 57 : les biholomorphismes de $\mathbb{D}$ sont les homographies (de $PSU_{1,1}(\mathbb{C})$).

Déf 58 : Une droite hyperbolique de $\mathbb{D}$ est un élément de $\mathcal{DC}$ ~~restreint à D est~~ intersectant orthogonalement $\partial\mathbb{D}$ que l'on restreint à $\mathbb{D}$ (figure 11)

Prop 59 : $\forall a,b\in\mathbb{D}$ distincts, il existe une unique droite hyperbolique passant par a et b.

Prop 60 : Pour toute droite hyperbolique $\mathcal{D}$ et $\forall a\in\mathcal{D}$, il existe une unique droite hyperbolique lui étant orthogonale en a.

Rq 61 : Il existe une infinité de droites hyperboliques non sécantes 2 à 2.

III Complexification du plan projectif réel

On suppose ici connu des bases sur le plan projectif réel et les coniques projectives. On note $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3\setminus\{0\}/\mathbb{C}^\times$ et $\mathbb{RP}^2=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}/\mathbb{R}^\times$ et on considère que $\mathbb{RP}^2\subset\mathbb{CP}^2$ à cause de $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\subset\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$. On nomme $P_\mathbb{R}$ (resp. $P_\mathbb{C}$) l'espace affine obtenu comme $\{(x:y:z)\in\mathbb{RP}^2 \text{ (resp. } \mathbb{CP}^2) \text{ tq } z\neq 0\}$. ~~de sorte que $P_\mathbb{R}$~~ On appelle droite à l'infini notée D_∞ la droite projective $\{(x:y:0)\in\mathbb{CP}^2\}$ de sorte que $\mathbb{CP}^2 = P_\mathbb{C}\sqcup D_\infty$.

Déf 62 : $P_\mathbb{C}$ est appelé le complexifié de $P_\mathbb{R}$ ($\subset P_\mathbb{C}$) et $\mathbb{CP}^2$ complexifié de $\mathbb{RP}^2$.

1) Structure euclidienne sur $P_\mathbb{R}$ et points cycliques

On considère que $P_\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$ (par l'identification $\mathbb{R}^2\to P_\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto(x:y:1)$) de forme quadratique associée $q(x,y)=x^2+y^2$.

Déf 63 : On nomme cercle généralisé l'ensemble des points $(x:y:z)\in\mathbb{CP}^2$ satisfaisant

$$a(x^2+y^2)+bxz+cyz+dz^2=0$$

pour un certain $(a:b:c:d)\in\mathbb{CP}^3$ définissant [illegible].

Déf 64 : Tout cercle généralisé possède 2 points sur D_∞ qui sont les intersections des droites isotropes de $q=x^2+y^2$. On les nomme points cycliques notés $I=(1:i:0)$ et $J=(1:-i:0)$.

Prop 65 (Formule de Laguerre) : Soit D et D' deux droites sécantes en $O\in P_\mathbb{R}$ du plan affine $P_\mathbb{R}\subset\mathbb{CP}^2$, alors si α est l'angle (modulo π) ~~entre~~ orienté de D à D',

$$e^{2i\alpha} = [D', D, (OI), (OJ)]$$

Rq 66 : Se donner 2 points cycliques revient donc à se donner une structure similaire et ~~désigner~~ choisir lequel est I revient à choisir une orientation du plan.

2) Quelques applications aux coniques

On considère C une conique propre réelle de $P_\mathbb{R}$ prolongée à $\mathbb{CP}^2$.

Déf 67 : On appelle foyer projectif de C tout point de $\mathbb{CP}^2$ duquel on peut mener 2 tangentes ~~isotropes~~ à C isotropes pour $q=x^2+y^2$ (i.e. dont l'intersection à D_∞ est I ou J).

Prop 68 : Toute conique propre réelle admet un foyer dans $P_\mathbb{R}$.

Déf 69 : On appelle directrice de C associée à f la polaire de f, foyer projectif de C.

Prop 70 : Les notions de foyer projectif et directrices projectives coïncide avec la notion euclidienne si $f\in P_\mathbb{R}$, en restreignant C à $P_\mathbb{R}$.

Thm 71 (Un théorème de Poncelet) : Étant données 2 tangentes D et D' de C d'intersection a, ~~si~~ une tangente T les recoupent en m et m' ~~elle~~ respectivement, ~~de sorte que~~ $\widehat{mfm'}$ est indépendant de la tangente T choisie. (figure 12)

On rappelle le théorème suivant

Prop 72 : Soient a^* et b^* faisceaux de droites de points bases a et b et $h: a^*\to b^*$ homographie. Lorsque D parcourt a^*, $D\cap h(D)$ parcourt une conique Γ qui passe par a et b.

Thm 73 (hyperbole équilatère d'Apollonius) : C une conique de centre O et soit $p\in P_\mathbb{R}$ (figure 13) n'appartenant ni à C ni à ses axes, $\forall m\in C\cap P_\mathbb{R}$, ~~$p^*$ recoupe la droite~~ la droite de p^* orthogonale à la tangente $m^\perp$ (polaire de m) en m recoupe (Om) en un point q. Quand m décrit $C\cap P_\mathbb{R}$, q décrit une hyperbole équilatère passant par O de directions dirigées par les axes de $C\cap P_\mathbb{R}$.

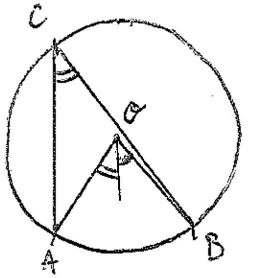

figure 1

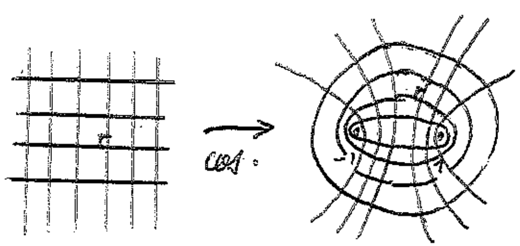

figure 2

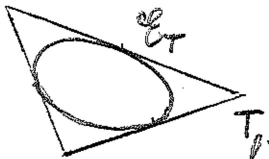

figure 3

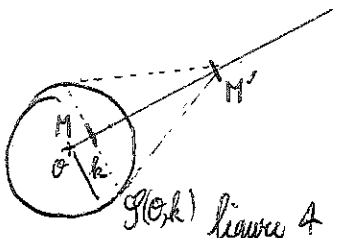

figure 4

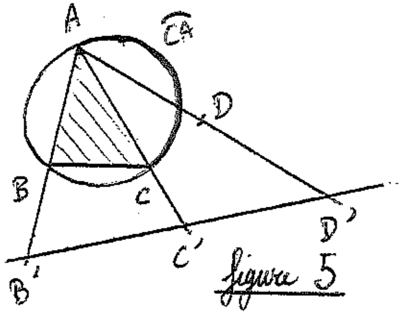

figure 5

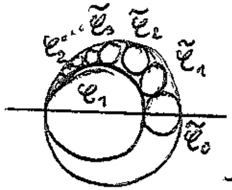

figure 6

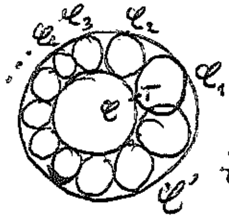

figure 7

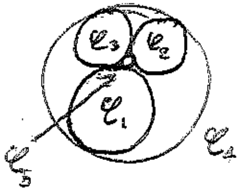

figure 8

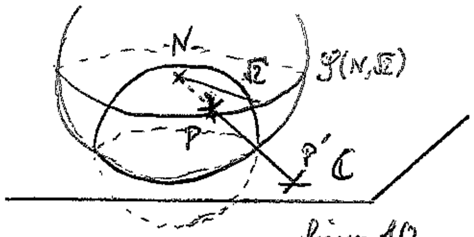

figure 10

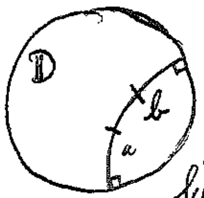

figure 11

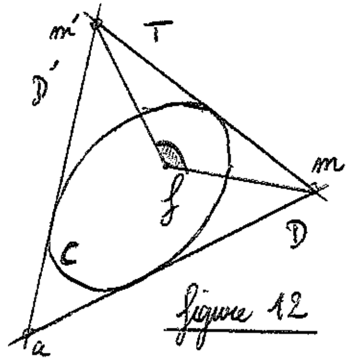

figure 12

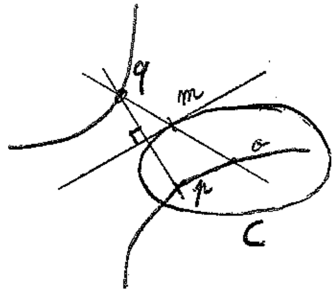

figure 13

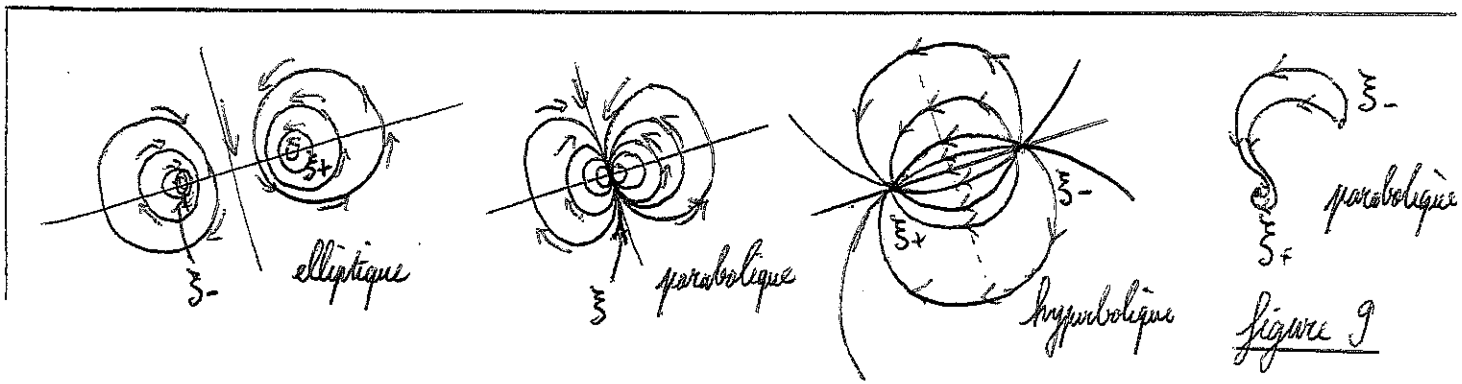

figure 9